Aufgaben zu exponentiellem Wachstum und Zerfall – ausführliche Lösungen

Aufgabe1 - Lösung

a) Auf welchen Betrag wächst ein Waldbestand von 45 000m^3 bei einem jährlichen Zuwachs von 8% in 10 Jahren an?
b) Berechne die Wachstumskonstante k!
c) Wie groß ist die Verdopplungszeit ?

Angaben:
Anfangsbestand N_o = 45 000 m^3
Jährlicher Zuwachs p = 8 %

a) t = 10 a
Gesucht: N(10) = ?

Die Wachstumsgleichung: $N(t) = N_o (1 + p)^t$ ===> $N(t) = 45\,000 (1 + 0{,}08)^t = 45\,000 * 1{,}08^t$

$N(10) = 45\,000 * 1{,}08^{10} = 97\,151{,}625....$ ====> $\mathbf{N(10) = 97\,151{,}625\ m^3}$

b) Wachstumskonstante k = ?
k = ln(1 + p) = ln(1,08) = **0,0769610411....**

Wachstumsgleichung: $N(t) = 45\,000\ e^{0{,}076961\ t}$ (bzw. $N(t) = 45\,000 * 1{,}08^t$)

c) Verdopplungszeit T_d
$T_d = {}^1/_k \ln(2) = {}^1/_{0{,}076961} \ln(2) = 9{,}0065$ ===> $\mathbf{T_d = 9\ a}$

Aufgabe2 - Lösung

Eine Nährlösung enthält pro cm^3 30 000 Keime. Nach Zugabe eines Desinfektionsmittels entält die Lösung nach 2 Stunden noch 25 000 Keime.
a) Gib die Zerfallskonstante k an! - Stelle die Zerfallsgleichung auf!
b) Gib die prozentuale Änderung p pro Stunde an. - Stelle die entsprechende Gleichung auf!
c) Wie viele Keime enthält die Lösung nach 5 Stunden?
d) Wann enthält die Lösung genau halb so viele Keime pro cm^3 wie zu Beginn (Halbwertszeit) ?

Angaben:
Zeit t in Stunden (h)
N_o = 30 000 (Keime)
N(2) = 25 000

---

a) Zerfallskonstante k = ?
Wachstumsgleichung: $N(t) = N_o\, e^{k\,t}$
Setze die Angaben (t = 2 , N(2) = 25 000, N_o = 30 000) ein und löse die Gleichung nach k auf:
$25\,000 = 30\,000\, e^{2\,k}$
$e^{2\,k} = {}^{5}/_{6}$
$2k = \ln({}^{5}/_{6})$
$k = {}^{1}/_{2} \ln({}^{5}/_{6})$
$k \approx -0{,}0911607$

$N(t) = 30\,000\, e^{-0{,}0911607\, t}$

---

b) prozentuale Änderung p pro Stunde = ?
$N(t) = N_o\,(1 - p)^t = N_o\, e^{k\,t}$
$(1 - p)^t = e^{k\,t}$
$(1 - p) = e^k$
$p = 1 - e^k$ <-------- Vgl. Formelsammlung
$p = 1 - e^{-0{,}0911607} = 1 - 0{,}912871....$
$p = 0{,}0871289.....$
$p \approx 8{,}7\%$

$N(t) = 30\,000\,(1 - 0{,}0871289.....)^t \approx 30\,000 * 0{,}912871^t$

---

c) N(5) = ?
Entweder:
$N(5) = 30\,000\, e^{-0{,}0911607 * 5}$ = ... **$\approx$ 19 018,15**
Oder:
$N(5) = 30\,000 * 0{,}912871^5$ = ... **$\approx$ 19 018,15**

---

d) Halbwertszeit T_h = ?
$N(T_h) = {}^{1}/_{2}\, N_o = N_o e^{k\,T_h}$
....
$T_h = {}^{1}/_{k} \ln({}^{1}/_{2})$ <-------- Vgl. Formelsammlung
$T_h = {}^{1}/_{-0{,}0911607} \ln({}^{1}/_{2})$
$T_h \approx 7{,}6$ (h)

Aufgabe3 - Lösung

Eine Bakterienkultur wächst exponentiell in 1 Stunde von 1100 Keimen auf 1250 Keime an.
a) Berechne die Wachstumskonstante k und die prozentuale Änderung p pro Stunde!
b) Stelle die entsprechenden Wachstumsgleichungen auf!
c) Nach welcher Zeit hat sich die Zahl der Keime verdoppelt?
d) Nach welcher Zeit hat die Kultur 11 000 Keime?

Angaben:
Zeit in Stunden (h)
N_o = 1100 (Keime)
N(1) = 1250

---

a) Wachstumskonstante k = ? Wachstumsgleichung: $N(t) = N_o\, e^{k\,t}$
Löse die Gleichung nach k auf und setze die Angaben (t = 1 , N(1) = 1250, N_o = 1100) ein:
$N(t) = N_o\, e^{k\,t}$
....
$k = {}^{1}/_{t} \ln({}^{N(t)}/_{No})$
....
$k = \ln({}^{1250}/_{1100}) \approx 0{,}1278333715$

Prozentuale Änderung p pro Stunde = ?
$p = {}^{N(1)}/_{No} - 1$ <------- Vgl. Formelsammlung
$p = {}^{1250}/_{1100} - 1$
....
$p \approx 0{,}136364 = 13{,}6364\%$

---

b) Die Wachstumsgleichung:
$N(t) = 1100\, e^{0{,}1278333715\, t}$

$N(t) = 1100 * 1{,}13664^{t}$

---

c) Verdopplungszeit T_d = ?
$T_d = {}^{1}/_{k} \ln(2)$ <------- Vgl. Formelsammlung
....
$T_d \approx 5{,}4$ (h)

---

d) N(t) = 11 000 ===> t = ?
$N(t) = N_o\, e^{k\,t}$
....
$t = {}^{1}/_{k} \ln({}^{N(t)}/_{No})$
....
$t \approx 18{,}01$ (h)

Aufgabe4 - Lösung

Die folgende Tabelle zeigt das Bevölkerungswachstum einer Großstadt (Einheit: 1000 E.):

Jahr	1940	1950	1960	1970
E-Anzahl in T.	700	980	1350	1870

a) Prüfe, ob es sich um exponentielles Wachstum handelt!
b) Falls es sich um exponentielles Wachstum handelt, stelle die Wachstumsfunktion auf!
c) Unter der Voraussetzung, dass exponentielles Wachstum vorliegt:
Wie viele Einwohner hatte die Stadt im Jahr 2000, wird sie im Jahr 2020 haben?

---

a) Prüfung auf exponentielles Wachstum:
Für exponentielles Wachstum muss gelten:
Das Verhältnis der Bestandswerte in jeweils gleichen Zeitabständen Δ t muss (annähernd) konstant sein. (Vgl. Kennzeichen für Exponentielles Wachstum)

$$N((n+1)\Delta t) / N(n\Delta t) = {}^{e^{k(n+1)\Delta t}}/_{e^{k n \Delta t}} = e^{k\Delta t} = \text{konstant}$$

Zeitabstand lt. Tabelle: $\Delta t = 10$ a
Wähle die Zeitachse so, dass t = 0 dem Jahr 1940 entspricht.

Vgls-Jahre	Zeit t	N(10 + t) / N(t)
1950 / 1940	0	$N(10) / N(0) = {}^{980}/_{700} = 1{,}4$
1960 / 1950	10	$N(20) / N(10) = {}^{1350}/_{980} \approx 1{,}377$
1970 / 1960	20	$N(30) / N(20) = {}^{1870}/_{1350} \approx 1{,}385$

Die Quotienten können als nahezu konstant angesehen werden, woraus exponentielles Wachstum folgt.
Um die Wachstumskonstante aus den empirischen Daten zu erhalten, wird der Mittelwert der Quotienten gebildet: 1,3873...
Er wird zur Aufstellung der Wachstumsfunktion benutzt.
(Genauere Ergebnisse erhält man, wenn man eine Gaußsche Ausgleichskurve durch die Wertepaare legt.)

---

b) Aufstellung der Wachstumsfunktion
Aus a) ergibt sich:
$e^{k\Delta t} = 1{,}3873$
$\Delta t = 10$ a
$e^{10k} = 1{,}3873$ <--- k bezieht sich damit auf 1 Jahr!
....
$k = {}^{1}/_{10} \ln(1{,}3873)$
k = 0,0327359412......
Die Wachstumsfunktion:
$N(t) = 700\, e^{0{,}032736\, t}$

---

c) Gesucht: Die Einwohnerzahl im Jahr 2000 bzw. 2020
Die Zeitskala wurde so gelegt, dass dem Jahr 1940 der Wert t = 0 entspricht. ===> 2000 entspricht t = 60 und 2020 entspricht t = 80.
Jahr 2000
$N(60) = 700\, e^{0{,}032736 \cdot 60}$ = **4990,2452** (Einwohner in 1 000)
Jahr 2020
$N(80) = 700\, e^{0{,}032736 \cdot 80}$ = **9604,2437** (Einwohner in 1 000)

Aufgabe5 - Lösung

Zur Untersuchung der Langzeitwirkung eines Medikamentes wird einer Versuchsperson eine Dosis von 70mg verabreicht. Danach wird täglich die Konzentration des Medikamentenwirkstoffes im Blut gemessen.

Zeit in Tagen	0	1	2	3	4
Konzentration in mg/L	10,00	7,20	5,18	3,72	2,68

a) Zeige, dass die Wirkstoffkonzentration exponentiell zurückgeht!
b) Bestimme die Zerfallskonstante k!
c) Bestimme die Halbwertszeit!
d) Wann sinkt die Konzentration erstmals unter 0,4 mg/L?

---

a) Nachweis des exponentiellen Verlaufs
Das Verhältnis der Bestandswerte in jeweils gleichen Zeitabständen Δt muss (annähernd) konstant sein. (Vgl. Kennzeichen für Exponentielles Wachstum)

Vgls-Tage	**Zeit t in Tagen**	**N(t + 1) / N(t)**
1 / 0	0	$N(1) / N(0) = {}^{7,2}/_{10} = 0,72$
2 / 1	1	$N(2) / N(1) = {}^{5,18}/_{7,2} \approx 0,7194$
3 / 2	2	$N(3) / N(2) = {}^{3,72}/_{5,18} \approx 0,7181$
4 / 3	3	$N(3) / N(2) = {}^{2,68}/_{3,72} \approx 0,7204$

Das Kriterium kann als erfüllt angesehen werden.

---

b) Bestimmung der Zerfallskonstanten k (aus den empirischen Daten)

$$N((n+1)\Delta t) / N(n\Delta t) = e^{k(n+1)\Delta t} / e^{k n \Delta t} = e^{k\Delta t} = \text{konstant}$$

Zeitabstand lt. Tabelle: $\Delta t = 1$ d (Tag)
Somit :

$$^{N(t+1)} / _{N(t)} = e^k$$

Zur genaueren Bestimmung von k werden die Werte $^{N(t+1)} / _{N(t)}$ aus obiger Tabelle gemittelt. (Eine bessere Näherung erhält man, wenn man eine Gaußsche Ausgleichskurve durch die Meßwerte legt!). Der Mittelwert der Quotienten in obiger Tabelle ist 0,7195. Damit erhält man:
$^{N(t+1)} / _{N(t)} = 0,7195 = e^k$
$k = \ln(0,7195)$
$k \approx -0,3292$

---

c) Bestimmung der Halbwertszeit T_h
$T_h = {}^1/_k \ln({}^1/_2)$
....
$T_h \approx 2,1$ d

---

d) Wann sinkt die Konzentration erstmals unter 0,4 mg/L?
Zerfallsgleichung: $N(t) = 10\, e^{-0{,}3292\, t}$
Damit:
$N(t) = 0{,}4 = 10\, e^{-0{,}3292\, t}$
....
$t \approx 9{,}8$ d

Aufgabe 6 - Lösung

Von Cäsium 137 zerfallen innerhalb eines Jahres etwa 2,3% seiner Masse.
a) Stelle die Zerfallsfunktion auf!
b) Wieviel Prozent des beim Reaktorunfall in Tschernobyl 1986 ausgetretenen Cäsiums sind noch vorhanden?
c) Bestimme die Halbwertszeit von Cäsium 137 !

Angaben:
Zeit t in a
p = 2,3% Abnahme, jährlich

---

a) Zerfallsfunktion = ?
$N(t) = N_o\,(1 - p)^t$
$N(t) = N_o\,(1 - 0{,}023)^t$
$N(t) = N_o\, 0{,}977^t$

---

b) Wieviel Cäsium ist noch vorhanden?
Für 1986 setze t = 0 a ====> Für 2008 folgt : t = 22 a
$N(22) = N_o\, 0{,}977^{22} \approx N_o\, 0{,}5993$
$^{N(22)}/_{No} \approx$ **60%** sind 2008 noch vorhanden.

---

c) Halbwertszeit T_h?
$k = \ln(1 - p) = \ln (0{,}977) \approx - 0{,}02327$

$T_h = {}^1/k \ln({}^1/_2)$
....
$T_h \approx 29{,}787$ a

Aufgabe 7 - Lösung

Eine Untersuchung über das Risiko von ehemaligen Rauchern, an Lungenkrebs zu erkranken, liefert folgende Werte:

Jahre seit beenden des Rauchens	0	2	4	6	8	10	12
Risiko zu erkranken in %	40	32	23	18	14	10	7

a) Zeige, dass das Risiko exponentiell abnimmt!
b) Stelle die Risiko-Zerfallsfunktion auf!
c) Wie groß ist das Risiko für einen ehemaligen Raucher, der vor 25 Jahren mit dem Rauchen aufgehört hat?
d) Das Risiko für einen Nichtraucher zu erkranken beträgt 1%. Nach welchem Zeitraum ist

das Risiko des ehemaligen Rauchers auf diesen Wert zurückgegangen?
e) Vergleiche das Risiko eines ehemaligen Rauchers, der vor 40 Jahren mit Rauchen aufgehöhrt hat, mit dem eines Nichtrauchers. Interpretiere das Ergebnis!

---

a) Zeige, dass das Risiko exponentiell abnimmt!

Vgls-Jahre	**Zeit t in Jahren**	**N(t + 2) / N(t)**
2 / 0	0	$N(2) / N(0) = {}^{32}/_{40} = 0{,}8$
4 / 2	2	$N(4) / N(2) = {}^{23}/_{32} \approx 0{,}71875$
6 / 4	4	$N(6) / N(4) = {}^{18}/_{23} \approx 0{,}78261$
8 / 6	6	$N(8) / N(6) = {}^{14}/_{18} \approx 0{,}77778$
10 / 8	8	$N(10) / N(8) = {}^{10}/_{14} \approx 0{,}71429$
12 / 10	10	$N(12) / N(10) = {}^{7}/_{10} = 0{,}7$

Das Kriterium kann als erfüllt angesehen werden.

---

b) Zerfallsfunktion = ?
Zum Berechnen der Zerfallskonstanten k bilde den Mittelwert der Quotienten N(t + 2) / N(t) aus obiger Tabelle (Vgl. auch Aufgabe 5) : N(t+2) / N(t) = 0,74891
Damit folgt:
$N(2) = N_o e^{2 k}$
$N(2) / N_o = 0{,}74891 = e^{2 k}$
....
$k = {}^{1}/_{2} \ln(0{,}74891) \approx - 0{,}14457$

$\mathbf{N(t) = 40 e^{-0{,}14457 t}}$

---

c) N(25) = ?
$N(25) = 40 e^{-0{,}14457 * 25}$

$\mathbf{N(25) \approx 1{,}0775}$

---

d) N(t) = 1 ===> t = ?
$N(t) = 1 = 40 e^{-0{,}14457 t}$
....
t ≈ 25,52 a

---

e) N(40) = ?
N(40) = ... ≈ 0,1232 ==========> **Unsinn!!**

Aufgabe 8 - Lösung

Ein PKW verliert pro Jahr (etwa) 20% seines Wertes.
a) Stelle die Preiszerfallsfunktion auf!
b) Wann hat er nur noch die Hälfte seines Wertes?
c) Zu welchem Zinssatz müsste ein Kapital angelegt werden, das sich in der gleichen Zeit verdoppelt?

Lösung:
$p = -20\% = -0{,}2$ pro Jahr
Z_0 : Neupreis
a)
Preiszerfallsfunktion:
$Z(t) = Z_0 \ (1 - p)^{t}$
$Z(t) = Z_0 \ (1 - 0{,}2)^{t}$
$Z(t) = Z_0 \ 0{,}8^{t}$

---

b)
Hälfte des Wertes : $Z(T_H) = {}^{Z_0}/_{2}$
${}^{Z_0}/_{2} = Z_0 \ 0{,}8^{T_H}$
${}^{1}/_{2} = 0{,}8^{T_H}$
$\ln({}^{1}/_{2}) = T_H \ln(0{,}8)$
${}^{\ln(0{,}5)}/_{\ln(0{,}8)} = T_H$
$3{,}1 \approx T_H$

---

c)
Gesucht: p für $T_H = 3{,}1$ a
$K(T_H) = 2 \ K_0 \ (1 + p)^{3{,}1}$
$2 = (1 + p)^{3{,}1}$

$0{,}25 \approx p$

$p = 25\%$

Aufgabe 9 - Lösung

In Meerwasser nimmt die Lichtintensität pro Meter Wassertiefe auf ${}^{1}/_{4}$ des ursprünglichen Wertes ab.
a) Wie viel Prozent der ursprünglichen Intensität sind in 1m, 2m, 10m Wassertiefe noch vorhanden?
b) In welcher Wassertiefe sind noch 50%, 10%, 1% der ursprüngliche Intensität erhalten?

Lösung:
Die Lichtintensität nimmt pro Meter Wassertiefe auf $^1/_4$ des ursprünglichen Wertes ab.
===> p = - 0,75
$I(t) = I_0 (1 - 0,75)^t = I_0 0,25^t$

a)

t	$^{I(t)}/_{I0}$	%
t = 1m	$^{I(1)}/_{I0} = 0,25^1 = 0,25$	25%
t = 2m	$^{I(2)}/_{I0} = 0,25^2 = 0,0625$	6,25%
t = 10m	$^{I(10)}/_{I0} = 0,25^{10} \approx 9,5 * 10^{-7}$	$9,5 * 10^{-5}$%

---

b)
Abnahmefunktion nach t auflösen:
$I(t) = I_0 0,25^t$
$^{I(t)}/_{I0} = 0,25^t$
$\ln(^{I(t)}/_{I0}) = t * \ln(0,25)$
$^{\ln(I(t)/_{I0})}/_{\ln(0,25)} = t$

Für $^{I(t)}/_{I0}$ die entsprechenden Werte einsetzen:

$^{I(t)}/_{I0}$	$^{\ln(I(t)/_{I0})}/_{\ln(0,25)}$	t in m
50%	$^{\ln(0,5)}/_{\ln(0,25)}$	0,5
10%	$^{\ln(0,1)}/_{\ln(0,25)}$	$\approx$ 1,66
1%	$^{\ln(0,01)}/_{\ln(0,25)}$	$\approx$ 3,32

Aufgabe 10 - Lösung

In einer Stadt verbreitet sich ein Gerücht. Die Zahl der Personen, die davon gehört haben, nimmt pro Woche um 15% zu.

Wie lange dauert es, bis alle Bewohner der Stadt (Weinheim = 40 000; Heidelberg = 130 000) davon gehört haben?

Lösung:
Zunahme um 15% pro Woche
===>

$N(t) = N_0 (1 + p)^{t} = I_0 (1+ 0,15)^t$
$N(t) = N_0 \, 1,15^t$

Über den Anfangswert N_0 sind keine Angaben gemacht.
Setze $N_0 = 1$
Damit:
$N(t) = 1 * 1,15^t$
$N(t) = 1,15^t$

Löse die Gleichung nach t auf:
$\ln(N(t)) / \ln(1,15) = t$

Setze für N(t) die entsprechenden Werte ein.

N(t)	**$\ln(N(t)) / \ln(1,15) = t$**	**t in Wochen**
40 000	$\ln(40\,000) / \ln(1,15)$	≈ 75,82
130 000	$\ln(130\,000) / \ln(1,15)$	≈ 84,25

Aufgabe11 - Lösung

Der Wirkstoff einer Tablette wird im menschlichen Körper exponentiell abgebaut. Unmittelbar nach der Einnahme befinden sich 0,8g des Wirkstoffs im Körper, nach 10 Stunden noch 0,04g.
a) Stelle die Zerfallsfunktion auf!
b) Wie groß ist die Halbwertszeit?
c) Ein Patient bekommt verordnet:
Um 8:00 Uhr 1 Tablette, um 14:00 Uhr 2 Tabletten , um 20:00 Uhr 1 Tablette.
Wie viel Wirkstoff hat er am nächsten Morgen um 8:00 vor Einnahme der Tablette noch im Körper?

Angaben:
Anfangsbestand $N_o = 0,8$ g
Bestand nach t = 10 h : N(10) = 0,04g

a) Gesucht : Zerfallsgleichung, d.h. k : $N(t) = N_o\ e^{k\ t}$

Lösung:
$N(t) = N_o\ e^{k\ t}$
Einsetzen:
t = 10h
N(10) = 0,04
$N_o = 0,8$
===> $0,04 = 0,8\ e^{k\ 10}$
===> $0,05 = e^{k\ 10}$
============> $k = {}^{\ln(0,05)}/_{10} \approx -0,299573$

Zerfallsgleichung: $N(t) = 0,8\ e^{-0,299573\ t}$

---

b) Halbwertszeit T_H = ?
$T_H = -\ {}^{1}/_{k}\ \ln(2)$
......
====> $T_H \approx 2,314$ h

---

c)
1.Möglichkeit:
Rechnung für den 2.Tag der Einnahme 8:00 morgens,
d,h. der Patient hat zu Beginn der Behandlung am ersten Tag keinen Wirkstoff im Körper!

Uhrzeit Einnahme	**Stunden t bis zur Einnahme am nächsten Tag um 8:00**	**Anzahl Tabletten = Wirkstoffmenge N_0**	**Davon am nächsten Morgen 8:00 noch übrig (Formel)**	**Ergibt**
8:00	24 h	1 Tabl. = 0,8g	$N(24) = 0,8\ e^{-0,299573 * 24}$	≈ 0,000603 g
14:00	18 h	2 Tabl. = 1,6g	$N(18) = 1,6\ e^{-0,299573 * 18}$	≈ 0,007282 g
20:00	12 h	1 Tabl. = 0,8g	$N(12) = 0,8\ e^{-0,299573 * 12}$	≈ 0,021971 g
8:00	---	---	Wirkstoffmenge am nächsten Morgen (2.Tag) um 8:00 vor Einnahme der Tablette	≈ 0,029856 g

Hinweis:
Will man die Wirkstoffmenge für den folgenden Tag berechnen, so muss obige Restmenge

berücksichtigt werden,
d.h. für 8:00 morgens am 2.Tag: N_0 = 0,029856 g + 0,8 g

2.Möglichkeit:

Einnahme um	**Unmittelbar danach vorhandene Wirkstoffmenge**	**Nächste Einnahme**	**Stunden**	**Unmittelbar vor nächster Einnahme verbleibende Wirkstoffmenge**	**Ergibt**
8:00	0,8	14:00	6	$N(6) = 0{,}8\, e^{-0{,}299573 * 6}$	≈ 0,1325783415
14:00	0,1325783415 + 1,6 = 1,7325783415	20:00	6	$N(6) = 1{,}7325783415\, e^{-0{,}299573 * 6}$	≈ 0,2871279539
20:00	0,2871279539 + 0,8 = 1,087127954	8:00	12	$N(12) = 1{,}087127954\, e^{-0{,}299573 * 12}$	≈ 0,029856978

In einem Ausdruck geschrieben:
$N(24) = \{ [(0{,}8\, e^{-0{,}299573 * 6}) + 1{,}6]\, e^{-0{,}299573 * 6} + 0{,}8 \}\, e^{-0{,}299573 *12} \approx 0{,}0298569783$

Aufgabe12 - Lösung

Heißer Kaffee von 50°C kühlt sich in einer Tasse langsam auf Umgebungstemperatur (18°C) ab.
Der Temperaturabfall wird durch folgende Funktion beschrieben: $f(t) = 50\, e^{-0{,}03t}$ (t in Minuten).
a) Nach wie vielen Minuten ist der Kaffee auf Körpertemperatur (37°C) abgekühlt?
b) Wie hoch ist die prozentuale Temperaturänderung (pro Minute) ?
c) Geben Sie damit die Gleichung für den Temperaturabfall an !

Lösung:
a)
$f(t) = 50\, e^{-0{,}03\, t}$
f(t) = 37° C
t = ? <--- Zeit in Minuten

Einsetzen:
$37 = 50\, e^{-0{,}003\, t}$

===> $0,74 = e^{-0,03\,t}$
....
....
$t = {}^{\ln(0,74)}/_{-0,03} \approx 10,04$ (min)

---

b)
p = ?
Entweder
aus der Formelsammlung: $p = 1 - e^{k}$
oder
die Herleitung: $f(t) = 50\, e^{-0,03\,t} = 50\,(1 - p)^{t}$ ==> siehe oben

$p = 1 - e^{-0,03} \approx 0,02955 = 2,955\%$

---

c)
$f(t) = 50 * (1 - 0,02955)^{t}$
$= 50 * 0,97045^{t}$

Aufgabe13 - Lösung

Auf dem Gebiet des heutigen Bangladesch lebten 1921 33 Millionen Menschen, 1976 waren es 75 Millionen.
a) Wie viele werden es 2020 sein (bei gleichbleibenden exponentiellen Wachstum) ?
b) Wie hoch ist die jährliche prozentuale Zuwachsrate p?
c) Berechne dieVerdopplungszeit der Bevölkerung!
d) Berechne die Bevölkerungszahl nach 46,436 Jahren, 92,872 Jahren, 139,308 Jahren!

Lösung:
a) Angaben:

Jahr	**t**	**N(t) in Mill.**
1921	t = 0	$N_0 = 33$
1976	t = 55	$N(55) = 75$
2020	t = 99	$N(99) = ?$

Rechnung:

Entweder	**Oder**
Berechne k	Berechne p
$N(t) = N_0\, e^{k\,t}$	$N(t) = N_0\,(1 + p)^{t}$

$75 = 33\ e^{k * 55}$	$75 = 33(1 + p)^{55}$
$^{75}/_{33} = e^{k * 55}$	$^{75}/_{33} = (1 + p)^{55}$
	$\sqrt[55]{\frac{75}{33}} - 1 = p$
0,0149269191 = k	0,015038882 = p

Damit ergibt sich für das Jahr 2020:

$N(99) = 33\ e^{0,0149269191 * 99}$	$N(99) = 33\ (1 + 0,015038882)^{99}$
N(99) = 144,64	N(99) = 144,64

---

b) Siehe a) unter "Oder"

---

c)
Formelsammlung:
$T_d = {}^{1}/_{k}\ \ln(2)$
$T_d \approx 46,436$

---

d)

t	N(t)
$t = 46,436 = T_d$	N(46,436) ≈ 66
$t = 92,872 = 2\ T_d$	N(92,72) ≈ 132
$t = 139,308 = 3\ T_d$	N(138,308) ≈ 264

Aufgabe14- Lösung

Für ein radioaktives Element gilt folgendes Zerfallsgesetz (t in Minuten): $N(t) = N_o\ e^{-0,322\ t}$
N(t) ist dabei die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch NICHT zerfallenen Teilchen.
a) Berechne die prozentuale Zerfallsrate pro Minute!
b) Wie groß ist die Halbwertszeit ?
c) Wie viele Teilchen sind nach 3,105 Minuten zerfallen?
d) Wann sind 90% der Teilchen zerfallen?

Lösung:
Angaben:
$N(t) = N_o\ e^{-0,322\ t}$, Zeit in Minuten

a) p = ?
Formelsammlung:
$p = 1 - e^{k}$
$p = 1 - e^{-0,322\ t}$
....
p = 0,2753018097
$p \approx 27,5\%$

---

b) T_H = ?
Formelsammlung:
$T_H = -{}^{1}/_{k} \ln(2)$
....
$T_H \approx 2,15$ min

---

c) t = 3,105 min
$N(3,105) = N_o\ e^{-0,322 * 3,105}$

${}^{N(3,105)}/_{No} = e^{-0,322 * 3,105}$

${}^{N(3,105)}/_{No} \approx 0,36795$

${}^{N(3,105)}/_{No} \approx 36,795\%$ <== sind noch nicht zerfallen

===> 100% - 36,795% = 63,205% sind zerfallen

---

d) 90% zerfallen ===> 10% sind noch nicht zerfallen
${}^{N(t)}/_{No} = 0,1 = e^{-0,322 * t}$
....
${}^{\ln(0,1)}/_{-0,322} = t$

$7,15 \text{ min} \approx t$

Aufgabe15 - Lösung

1950 schätzte man die Weltbevölkerung auf 2,2 Mrd. Menschen, 1985 auf 4,6 Mrd. .
a) Stelle die Wachstumsgleichung auf!
b) Überprüfe bzw. verbessere die Gleichung : 1998 gab es 6 Mrd. Menschen auf der Erde.
c) Welche Bevölkerungszahl ergibt sich dann für das Jahr 2020 ?
d) Welche Bevölkerungszahl ergibt sich für das Jahr 0 ?
e) Wie groß ist die jährliche Zuwachsrate ?

f) In welchem Jahr erreichte die Bevölkerungszahl 1 Mrd.?
g) Wie hoch ist die Verdopplungszeit?

Lösung:
a) Angaben:

Jahr	t	N(t) in Mrd
1950	t = 0	$N_0 = 2{,}2$
1985	t = 35	N(55) = 4,6

Rechnung:

Entweder	Oder
Berechne k	Berechne p
$N(t) = N_0\ e^{k\ t}$	$N(t) = N_0\ (\ 1 + p\ )^t$
$4{,}6 = 2{,}2\ e^{k\ *\ 35}$	$4{,}6 = 2{,}2(\ 1 + p\ )^{35}$
$^{4,6}/_{2,2} = e^{k\ *\ 35}$	$^{4,6}/_{2,2}= (\ 1 + p\ )^{35}$
0,0210742555 = k	0,021297886 = p

---

b)
Legt man 1950 als Ausgangsjahr für den Vergleich zugrunde, so ergibt sich:

1950 t = 0 $N_0 = 2{,}2$ 1998 ==> t = 48 N(48) = 6

Legt man 1985 als Ausgangsjahr für den Vergleich zugrunde, so ergibt sich entsprechend:

1985 t = 0 $N_0 = 4{,}6$ 1998 ==> t = 13 N(13) = 6

Im Folgenden wird mit der 1. Möglichkeit gerechnet.
(Rechne zur Übung entsprechend mit der 2. Möglichkeit!)

$N(48) = 6 = 2{,}2\ e^{k * 48}$	$N(48) = 2{,}2\ (1 + p)^{48}$
$0{,}0209021273 \approx k$	$0{,}021122107 \approx p$

---

c)
Rechne mit den aus Teil b) Möglichkeit 1 erhaltenen Werten weiter: $N(t) = 2{,}2\ e^{0{,}0209021273 * t}$
Für das Jahr 2020 ergibt sich damit: t = 70
$N(70) = 2{,}2\ e^{0{,}0209021273 * 70}$
$N(70) \approx 9{,}5$ (in Mrd)

---

d)
Beachte: Das Jahr 0 gibt es nicht!
Die Jahreszählung springt vom Jahr -1 (1 v.Chr.) direkt auf das Jahr +1 (1 n.Chr).

Nimmt man 1950 als Ausgangsjahr (t = 0), so erhält man die Werte für das Jahr "0" mit t = -1950
$N(-1950) = 2{,}2\ e^{0{,}0209021273 * (-1950)}$
$N(-1950) = 4{,}214 * 10^{-18}$ (in Mrd)
$N(-1950) = 4{,}214 * 10^{-9}$ <=== UNSINN! Das heißt: der 4 milliarsdste Teil eines Menschen
Folgerung:
Die Wachstumsgleichung kann mit obigen Konstanten nicht über so lange Zeiträume angewendet werden.

---

e)
Vgl. Teil a) oder b)

---

f)
N(t) = 1 (in Mrd) == > t = ?
$N(t) = 2{,}2\ e^{0{,}0209021273 * t}$
$1 = 2{,}2\ e^{0{,}0209021273 * t}$
....

$-37{,}7 \approx t$

1950 - 37,7 ===> Die erste Milliarde wurde 1922/23 erreicht.

---

g)
Formelsammlung:
$T_d = {}^{1}/_{k} \ln(2)$
....
$T_d \approx 33{,}2$ (Jahre)

Aufgabe16 - Lösung

Wie oft muss man einen 1mm dicken Karton falten, bis der gefaltete Karton sich bis zum Mond (ca. 380 000 km) stapelt ?
(Nach A. Beutelspacher)

Lösung:

n : Anzahl der Faltungen
d_0 = 1mm = 0,001m = $1*10^{-3}$m
d(n) = 380 000 km = $3,8 * 10^5$km = $3,8 * 10^8$m

Bei jeder Faltung verdoppelt sich die Höhe. Deshalb:
$d(n) = 0,001 * 2^n$
$3,8 * 10^8 = 1 * 10^{-3} 2^n$
$3,8 * 10^{11} = 2^n$
$\ln(3,8 * 10^{11}) = \ln(2^n)$
$\ln(3,8 * 10^{11}) = n * \ln(2)$
$^{\ln(3,8 * 1011)} / _{\ln(2)} = n$
$38,5 \approx n$

Aufgabe17 - Lösung

Der Spannungsverlauf (= Restspannung) bei der Entladung eines Kondensators wird beschrieben durch:

$$U(t) = U_o\, e^{-t/T}$$

Dabei ist T eine Konstante, die vom Kondensator bzw. Stromkreis abhängt.
(T = R*C, wobei R der Ohmsche Widerstand des Stromkreises und C die Kapazität des Kondensators ist.)
a) Bestimme die Spannung nach t = T Sekunden!
b) Bestimme die Zeit t, nach der die Spannung um 99% abgefallen ist!

Lösung:
$U(t) = U_o\, e^{-t/T}$
a) Gesucht : U(T) = ?
t = T
$U(T) = U_o\, e^{-T/T}$

$U(T) = U_o\, e^{-1}$

$^{U(T)}/_{U_o} = e^{-1} \approx 36,8\%$

In der Zeit t = T sinkt die Spannung am Kondensator auf den e-ten Teil ab.
Man bezeichnet diese Zeit als "Zeitkonstante" des Entladekreises.

---

b) Gesucht t für: $^{U(t)}/_{Uo} = 0{,}01$
$^{U(t)}/_{Uo} = 0{,}01 = e^{-t/T}$
......
$-T * \ln(0{,}01) = t$
$4{,}605\ T \approx t$

Aufgabe18 - Lösung

Die Intensität einer Gamma-Strahlung wird durch eine Schutzwand von 10 cm Dicke um 20% reduziert.
a) Wie groß ist die Intensität dieser Strahlung hinter einer Wand aus gleichem Material von 50cm Dicke?
b) Wie dick muss die Wand (gleiches Material) gemacht werden, damit nur noch 10% der ursprünglichen Intensität vorhanden ist?

Lösung:
a)
d = 10cm ===> 20% Reduzierung ====> Für d = 10cm ist noch 80% der Strahlung vorhanden.
Rechnung in cm!

Entweder
$I(d) = I_0 (1 - p)^d$
oder
$I(d) = I_0\ e^{k\ d}$

Beachte: Die Gleichungen geben die noch vorhandene Intensität der Strahlung an - NICHT die Absorbtion.
Benutze z.B. den 2. Ansatz:
$I(d) = I_0\ e^{k\ d}$
$I(10) = I_0 e^{k * 10}$
$^{I(10)}/_{I0} = 0{,}8 = e^{k * 10}$
$^{\ln(0{,}8)}/_{10} = k$
$-0{,}0223143551 \approx k$
Damit:
$I(d) = I_0\ e^{-0{,}022314\ d}$

Für eine Dicke von d = 50 cm ergibt sich daraus:

$^{I(50)}/_{I0} = e^{-0{,}022314 * 50} \approx 0{,}328$

D.h.: ca. 32,8% der Stahlung ist noch vorhanden, die Strahlung wurde um 67,2% reduziert.

---

b)
$^{I(d)}/_{I0} = 10\%$ ===> d = ?
=====>
$0{,}1 = e^{-0{,}022314 * d}$
$^{\ln(0{,}1)}/_{-0{,}022314} = d$
$103{,}19$ (cm) $\approx d$

Aufgabe19 - Lösung

Ein radioaktives Element hat eine Halbwertszeit von 87 Jahren.
a) Bestimme die Zerfallskonstante k ! - Stelle die Zerfallsgleichung auf!
b) Um wieviel Prozent nimmt die Zahl der Teilchen pro Jahr ab?
c) Wie viele Jahre dauert es, bis 99% der Teilchen zerfallen sind?

Lösung:
$T_H = 87$ a
a)
k = ?
Aus der Formesammlung:
$T_H = -^1/_k \ln(2)$
$k = -\, ^1/_{TH} \ln(2)$
$k \approx -0{,}00796721$
Somit:
$N(t) = N_0 e^{-0{,}00796721\, t}$

---

b)
Entweder
Formelsammlung
$p = 1 - e^k$

oder
$^{N(1)}/_{N0} = e^{-0{,}00796721 * 1}$
$^{N(1)}/_{N0} \approx 0{,}992064$ <-- sind nach einem Jahr noch übrig
p = 1 - 0,992064 = 0,007936 = 0,7936 % <--- Abnahme pro Jahr

---

c)
Gesucht: t = ? bis 99% aller Teilchen zerfallen sind ===> 1% ist noch übrig

$^{N(t)}/_{N0} = 0{,}01 = e^{-0{,}00796721 * t}$

$^{\ln(0{,}01)}/_{-0{,}00796721} = t$
$578{,}015 \approx t$ (Jahre)

Aufgabe20 - Lösung

Für eine Altersbestimmung von organischem Material verwendet man die Tatsache, dass die Luft schon immer einen konstanten Anteil des radioaktiven Kohlenstoffisotops C_{14} enthielt. Über die Atmung wird dieses in den lebenden Organismus aufgenommen. Deshalb finden in lebender Materie dauernd ca. 16 000 C_{14}-Zerfälle je Minute und Kg organischen Gewebes statt. Wenn bei Eintritt des Todes die Atmung aufhört, werden der toten Materie keine neuen C_{14} - Isotope mehr zugeführt. Der Anteil des radioaktiven C_{14}-Isotopes im toten Gewebe nimmt deshalb durch Zerfall dauernd weiter ab, die Anzahl der Zerfälle geht zurück.
C_{14} hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren.
a) Berechne die Zerfallskonstante
b) Wie viele C_{14}-Isotope müssen in 1Kg lebender Materie vorhanden sein, damit 16 000 Zerfälle pro Minute stattfinden?
Stelle die Zerfallsgleichung für C_{14} auf!
c) Messungen an der Mumie Tut-Ench-Amuns ergaben 1985, dass etwa 10720 Zerfälle pro Minute und Kg stattfanden. In welchem Jahr starb Tut-Ench-Amun?

Lösung:
Gegeben: Halbwertszeit $T_H = 5730$ a
a) Gesucht: k = ?
Aus der Formelsammlung:
$T_H = -{}^{1}/_{k} \ln(2)$

$k = -{}^{\ln(2)}/_{TH}$
....
$k = -0,0001209681$

Damit ergibt sich die Zerfallsgleichuung:
$N(t) = N_0 \, e^{- 0,0001209681 * t}$

---

b) Gesucht : N_0 = ?

16000 Zerfälle pro Min. ==> $16000 * 365,25 * 24 * 60 \approx 8,4 * 10^9$ Zerfälle pro Jahr
Für N(1) folgt:
$N(1) = N_0 - 8,4 * 10^9 = N_0 \, e^{- 0,0001209681 * 1}$

$N_0 - N_0 \, e^{- 0,0001209681} = 8,4 * 10^9$

$N_0 \, (1 - e^{- 0,0001209681}) = 8,4 * 10^9$

$N_0 = {}^{8,4 * 109}/_{(1 - e^{- 0,0001209681})}$

$N_0 \approx 6,944 * 10^{13}$

$N(t) = 6,944 * 10^{13} \, e^{- 0,0001209681 * t}$

---

c) Gegeben: 1985 ===> 10720 Zerfälle pro Min. u. Kg
Gesucht : t = ?
Stelle die Gleichung für die Zerfälle auf:

Halbwertszeit der Zerfälle = Halbwertszeit von C_{14} = 5720 a
z_0 = 16000 pro Min
z(t) = 10720 pro Min
Die Umrechnung auf Zerfälle pro Jahr ist hier nicht notwendig wegen der folgenden Division: $^{z(t)}/_{z0}$

$z(t) = 16000\ e^{-0{,}0001209681 * t}$

$10720 = 16000\ e^{-0{,}0001209681 * t}$

......
$t = {}^{\ln(10720/16000)}/_{-0{,}0001209681}$

$t \approx 3310{,}6$

Als Jahreszahl ergibt sich: 1985 - 3311 ===> 1326 v. Chr.
(Gestorben lt Wikipedia zwischen Dez. 1324 u. Feb. 1323 v. Chr,)

Aufgabe21 - Lösung

Bei einer Untersuchung des Turiner Grabtuches stellte man eine Aktivität von 13,84 C_{14}-Zerfällen pro Gramm Kohlenstoff und Minute fest.
Wie alt ist das Tuch, wenn noch lebendes Material eine Aktivität von 15,30 Zerfällen pro Gramm C und Minute besitzt ?
Die Zerfallsfunktion für C_{14}: $z(t) = z_0\ e^{-1{,}2097 * 10-4t}$, wobei t in Jahren und z(t) die Anzahl der Zerfälle angibt!

Lösung:
Gegeben:
Zerfallsfunktion: $z(t) = z_0\ e^{-1{,}2097 * 10-4t}$, wobei t in Jahren
z_0 = 15,30 Zerfälle pro Gramm C und Minute
z_t = 13,84 C_{14}-Zerfälle pro Gramm Kohlenstoff und Minute

Gesucht: t = ?

$z(t) = z_0\ e^{-1{,}2097 * 10-4t}$
$^{z(t)}/_{z0} = e^{-1{,}2097 * 10-4t}$
Wegen $^{z(t)}/_{z0}$ erübrigt sich die Umrechnung auf Zerfälle pro Jahr.
$^{13{,}84}/_{15{,}30} = e^{-1{,}2097 * 10-4t}$

$0{,}9045751634 = e^{-1{,}2097 * 10-4t}$

$^{\ln(0{,}9045751634)}/_{-1{,}2097 * 10^{-4}} = t$

$829 \approx t$ (in Jahren)

Aufgabe22 - Lösung

1991 wurde in den Alpen die Gletschermumie "Ötzi" gefunden. Sie enthielt noch 53,3% des C_{14}-Isotops, das in lebendem Gewebe vorhanden ist.
Wann starb "Ötzi"?

Hinweis:
Die Zerfallsgleichung von C_{14} $N(t) = N_o\ e^{-1,2097 *10-4\ t}$, t in Jahren
N(t) gibt die Anzahl der zum Zeitpunkt t noch NICHT zerfallenen C_{14}-Teilchen an!

Lösung:
Gegeben:
1991 noch 53,3% = 0,533 C_{14} ===> ${}^{N(t)}/_{No} = 0,533$

$N(t) = N_o\ e^{-1,2097 *10-4\ t}$

${}^{N(t)}/_{No} = e^{-1,2097 *10-4\ t}$
....

${}^{n(0,533)}/_{-1,2097 *10}{}^{-4} = t$

5201,57 ≈ t (in Jahren)

Für 1991 ==> t = 0 folgt: Sterbejahr ca. 3211 / 3210 v.Chr.