ARGE Mathematatik AHS Kärnten

Mag. Gerhard Hainscho (Hrsg.)

Matura 1998

Aufgaben zur schriftlichen Reifeprüfung aus Mathematik im Haupttermin 1997/98

9020 Klagenfurt, BG für Berufstätige Ferdinand-Jergitsch-Straße 21
Mag. Bernhard Kröpfl

1. **Untersuchen von Funktionsgraphen**

   Eine Polynomfunktion dritten Grades besitzt in $x_1 = 0$ eine Wendestelle, in $x_2 = 2$ und $x_3 = -1$ zwei Nullstellen. Die Fläche „unter" der Kurve zwischen den beiden Nullstellen mißt 13,5 Flächeneinheiten.

   a) Wie lautet die Funktionsgleichung?

   b) Führen Sie eine „Kurvendiskussion" durch und zeichnen Sie den Funktionsgraphen.

   c) Der Graph der 1. Ableitungsfunktion f' und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück M. Berechnen Sie das Volumen jenes Drehkörpers, der entsteht, wenn M um die y-Achse rotiert.

   [**Lösungen:** a) $f(x) = -2x^3 + 6x + 4$ b) $N_1 = T(-1/0)$ N_2 (2/0) H(1/8) W(0/4) c) $V_y = 3\pi$]

2. **Nichtlineare analytische Geometrie (Kreis)**

   Gegeben sind vier Punkte: A(8/-2), B(9/-5), C(0/4), D(8/0,5).

   a) Wie lautet die Gleichung jenes Kreises, der durch die Punkte A, B und C verläuft?

   b) Finden Sie die Gleichungen jener Tangenten, die von D aus an den Kreis gelegt werden können.

   c) Wieviel mißt der Winkel zwischen den beiden Tangenten? Wieviel mißt der Flächeninhalt des Dreiecks DT_1T_2?

   d) Zeigen Sie, daß die Gerade durch D und M Streckensymmetrale von T_1T_2 ist.

   e) Fertigen Sie eine Zeichnung an und überprüfen Sie damit die errechneten Resultate.

   [**Lösungen:** a) $(x+2)^2 + (y+7)^2 = 125$ b) T_1 (9/-5) t_1: $11x + 2y = 89$ T_2 (3/3) t_2: $x + 2y = 9$ c) $\varphi = 53{,}13°$ A = 12,5 d) g: $3x - 4y = 22$]

3. **Untersuchen von Graphen gebrochen-rationaler Funktionen**

   a) „Diskutieren" Sie die Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x) = \frac{x^3 + 8}{4x}$ und zeichnen Sie den Funktionsgraphen

   b) Im Intervall [-2;0] entsteht zwischen x-Achse und Asymptotenfunktion ein Flächenstück M. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstückes M.

   c) Wieviel beträgt das Volumen jenes Körpers, der bei Rotation von M um die x-Achse entsteht?

   d) Wieviel beträgt das Volumen jenes Körpers, der bei Rotation von M um die y-Achse entsteht?

   e) Veranschaulichen Sie die entstehenden Flächen und Körper.

   [**Lösungen:** a) a_1: $x = 0$ a_2: $y = \frac{x^2}{4}$ N = W(-2/0) T(1,59/1,89) b) $M = \frac{2}{3}$ c) $V_x = \frac{2\pi}{5}$ d) $V_y = 2\pi$]

4. **Beurteilende Statistik**

Untenstehende Tabellen fassen die Ergebnisse einer Befragung (September 1997) zum Themenkreis „Vorsorge“ zusammen:

Welche Variante zur Sicherung der Staatspensionen erscheint Ihnen am gerechtesten?			
	„eine Senkung der Pensionen“	„eine Anhebung des Pensionsalters“	„eine Erhöhung der Beiträge“
15 bis unter 50 Jahre	25%	33%	42%
50 Jahre und älter	8%	29%	62%

Muß man sich selbst um seine Altersvorsorge kümmern oder reicht die staatliche Pension aus?		
	„man muß sich selbst kümmern“	„staatliche reicht aus“
15 bis unter 50 Jahre	87%	13%
50 Jahre und älter	70%	30%

Wir setzen zunächst voraus, daß die angegebenen Häufigkeiten noch zutreffen.

a) In einer Stammtischrunde sitzen 10 (zufällig ausgewählte) unter-50-jährige beisammen. Wie wahrscheinlich ist es, daß mehr als die Hälfte von ihnen meint, eine Senkung der Pensionen sei am gerechtesten (vgl. Tab. 1)?

b) Bei einem großen Treffen werden 120 über-50-jährige zufällig ausgewählt und angesprochen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mehr als ein Drittel von diesen meint, die staatliche Pension reiche aus (vgl. Tab. 2)?

c) Insgesamt sind bei diesem Treffen 450 Personen älter als 50 Jahre. Wir nehmen an, daß diese 450 Personen eine Zufallsstichprobe aus allen ÖsterreicherInnen seien. Wie viele von diesen 450 werden wohl die Meinung vertreten, daß die staatliche Pension ausreicht (vgl. Tab. 2)? Schätzen Sie mit einer Sicherheit von 95%!

Durch eine neue Umfrage sollen die in der 1. Tabelle angegebenen Zahlen neu erhoben werden.

d) Wie viele Personen unter 50 Jahren müßte man befragen, um die neuen Ergebnisse mit einer Sicherheit von 90% und einer Toleranz von $\pm$ 5% angeben zu können?

Es werden schließlich 300 Personen unter 50 Jahren befragt.

e) 95 davon geben an, daß eine Senkung der staatlichen Pensionen noch die gerechteste Maßnahme sei. Ist dadurch die Annahme, daß sich die Zahl jener Personen zumindest erhöht hat, mit 95% Sicherheit bewiesen?

f) 120 von den 300 Befragten schlagen vor, man solle doch die Pensionsbeiträge erhöhen. Welche Sicherheit hat die Hochrechnung „40% $\pm$ 5%“?

[**Lösungen:** a) 1,97% b) 27,2% c) [116 ; 154] d) 271 e) ja: 95 liegt im kritischen Bereich f) 92,33%]

9020 Klagenfurt, BG für Berufstätige Ferdinand-Jergitsch-Straße 21
Mag. Josef Sommeregger

1. Ein Wald hat heute (1998) einen Bestand von 72 000 m^3 Holz. Seit 1983 ist nichts geschlägert worden, das hatte eine Gesamtzunahme des Bestandes um 60% zur Folge.

   a) Stellen Sie das Wachstumsgesetz $H(t) = H_0 \cdot a^t$ für ein exponentiell angenommenes Wachstum auf.

   b) Wie groß wird - bei gleichem Wachstum - der Bestand im Jahre 2010 sein?

   c) Um wieviel Prozent wird er gegenüber heute zugenommen haben?

   d) Wann wird sich der Holzbestand von 1983 verdoppelt haben?

   e) Wie groß ist für den Zeitraum von 1983 bis heute die jährliche Zuwachsrate in Prozent?

   [**Lösungen:** a) $H(t) = 45000 \cdot e^{0{,}0313 \cdot t}$ b) 104 770 m^3 c) 45,5% d) Verdoppelungszeit: 22,5 Jahre e) 3,2%]

2. Ein Grundstück hat die Form eines unregelmäßigen Vierecks ABCD. Da die Seite c unzugänglich ist, sind nur die Seiten a, b und d sowie die zwei entsprechenden Winkel meßbar:
   a = AB = 35 m, b = BC = 34,4 m, d = AD = 40,7 m, $\alpha = 102{,}4°$, $\beta = 111{,}5°$.

   a) Berechnen Sie die Größe des Grundstücks.

   b) Das Grundstück wird um eine halbe Million Schilling zum Verkauf angeboten. Ist das ein günstiger Preis, wenn der ortsübliche Grundpreis ca. 260,- pro m^2 beträgt?

   c) Wie lang ist die unbekannte Seite c = CD des Grundstücks?

   [**Lösungen:** a) A = 1 645,9 m^2 b) ungünstig; ortsüblich: 427 934,- c) 56,9 m]

3. 150 Schüler eines Jahrganges nahmen an einer Sportveranstaltung teil. Für den Hochsprung ergab sich eine der Normalverteilung ähnliche Verteilung mit dem Mittelwert $\mu = 1{,}05$ m und einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}22$ m.

   a) Überprüfen Sie, ob ein Schüler mit einer Sprungleistung von 1,21 m zu den besten 10% seines Jahrgangs zählt.

   b) Welche Leistungen sind erforderlich, damit ein Schüler zu den besten 10% seines Jahrgangs zählt?

   [**Lösungen:** a) nein: $P(X \geq 1{,}21) = 0{,}233$ b) 1,33 m]

4. Der Graph einer Polynomfunktion 4. Grades hat A(0/2) als Wendepunkt mit einer zur x-Achse parallelen Tangente. $\frac{9}{4}$ ist ein Extremwert von f, 1 ist Nullstelle von f.

   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung.

   b) Bestimmen Sie den zweiten Wendepunkt von f.

   c) Erstellen Sie eine Skizze im Bereich [-2;4].

   [**Lösungen:** a) $f(x) = x^4 - 3x^3 + 2$ b) $W_2\left(\frac{3}{2} / -\frac{49}{16}\right)$]

9020 Klagenfurt, BG für Berufstätige Ferdinand-Jergitsch-Straße 21
Mag. Eleonore Weitensfelder

1. Von den Enden einer 3 890 m langen Standlinie AB werden die Enden einer unbekannten Entfernung x = CD anvisiert und folgende Winkel gemessen: $\alpha_1 = \angle DAC = 24{,}8°$, $\alpha_2 = \angle CAB = 33{,}4°$, $\beta_1 = \angle DBC = 25{,}1°$, $\beta_2 = \angle ABD = 26{,}2°$.

   Wie groß ist die Entfernung CD?

   [**Lösungen:** AC = 3 048,9 m AD = 1 725,7 m CD = 1 649,6 m]

2. Berechnen Sie jenes Flächenstück, das abgegrenzt wird von x-Achse, Nullstellen und den Extremwerten folgender Funktion f: R → R, $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 5$.

   [**Lösungen:** $N_{12}(\pm\sqrt{5}/0)$ $N_{34} = W_{12}(\pm 1/0)$ $H_{12}(\pm\sqrt{3}/4)$ $T(0/-5)$ $A = \frac{64}{5}$]

3. Einer Halbkugel vom Radius R = 20 cm wird ein Drehkegel eingeschrieben, dessen Spitze im Mittelpunkt des Basiskreises liegt.

   Wie müssen die Maße des Kegels gewählt werden, damit er maximales Volumen besitzt?

   [**Lösungen:** r = 16,3 cm h = 11,5 cm $V_{max} = 3\,199{,}6\ cm^3$]

4. Berechnen Sie das Volumen jenes Drehkörpers, der bei Drehung des Graphen der Funktion f: R → R, $f(x) = x^3$ im Intervall [0;2]

   a) um die x-Achse

   b) um die y-Achse

   entsteht.

   [**Lösungen:** a) $V_x = \frac{128\pi}{7}$ b) $V_y = \frac{96\pi}{5}$]

9020 Klagenfurt, BG für Berufstätige Ferdinand-Jergitsch-Straße 21
Dr. Franz Schandl

Schriftliche Reifeprüfung für Externisten

1. **Exponentielle Vorgänge**

Die folgende Tabelle zeigt die Bevölkerungsentwicklung Lateinamerikas zwischen 1950 und 2000, wobei der für das Jahr 2000 angegebene Wert auf einer Schätzung der UNO beruht.

Jahr	1950	1975	1983	2000
Bevölkerung (in Mill.)	164	324	390	564

a) Man wähle die Daten von 1950 und 1983 als Ausgangsdaten zur Ermittlung eines exponentiellen Wachstumsmodells. Die Wachstumsfunktion ist für die Zeit von 1950 bis 2000 grafisch darzustellen und die Abweichung vom tatsächlich beobachteten Wert des Jahres 1975 zu berechnen.

b) Um wieviel weicht die Schätzung der UNO von unserem Modellwert ab? Man wage Prognosen für die Jahre 2010 und 2020.

c) In welchem Zeitraum verdoppelt sich die Bevölkerung Lateinamerikas und wann wird voraussichtlich die 1-Milliarden-Grenze überschritten werden?

[**Lösungen:** a) $B(t) = 164 \cdot 1{,}0266^t$ $\Delta_{1975} \approx 8$ b) $\Delta_{2000} \approx 45$ Prognosen: 792 1 030 c) 26 Jahre 2019]

2. **Trigonometrie**

Zur Vermessung zweier unzugängiger Punkte P und Q werden zwei bekannte Punkte A(14 630,50 / 7 279,63) und B(14 790,26 / 7 352,12) herangezogen und von dort die Winkel α = PAB = 124,5°, β = QAB = 35,0°, γ = QBA = 133,4° und δ = PBA = 37,1° gemessen. Vereinfachenderweise befinden sich die 4 Punkte in einer Horizontalebene (Angaben in m).

a) Es ist eine genaue Zeichnung im Maßstab 1 : 10 000 anzufertigen.

b) Es ist die Entfernung der beiden unzugängigen Punkte zu berechnen.

c) Es sind die Koordinaten von P und Q zu bestimmen.

[**Lösungen:** b) 714,53 c) P(14 343,41 / 7 452,77) Q(14 953,14 / 7 825,31)]

3. **Auffinden und Untersuchen von Polynomfunktionen**

Eine Polynomfunktion 3. Grades verläuft durch den Punkt P(-1/4), besitzt im Punkt E(0/5) ein Extremum und schneidet die x-Achse bei x = -2.

a) Man ermittle die Funktionsgleichung.

b) Man bestimme die Extrempunkte und den Wendepunkt und skizziere den Funktionsverlauf.

[**Lösungen:** a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5$ b) H(0/5) T(2/4) W(1/$\frac{9}{2}$)]

4. **Integralrechnung**

Eine Schale entstehe durch Rotation des Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{3x+1}$ um die x-Achse im Intervall [0;5] (Angaben in cm).

a) Man fertige eine Skizze an.

b) Man berechne das Volumen der Schale.

c) In die Schale wird 0,1 Liter Flüssigkeit eingefüllt. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Gefäß?

d) Welche Höhe muß die Schale mindestens haben, damit sie 0,25 Liter faßt?

[**Lösungen:** b) V_x = 0,133 l c) 4,29 cm d) 6,96 cm]

9020 Klagenfurt, BG/BRG „Ingeborg Bachmann“ Ferdinand-Jergitsch-Straße 21
Mag. Roland Breitegger

1. Gegeben sind die Ebene ε: x + 2y + 3z = -12 und die Gerade g durch die Punkte A(-3/-4/-5) und B(-3/-1/7).
   a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes D der Geraden g mit der Ebene ε.
   b) Projiziere die Gerade g normal auf ε und gib die Gleichung der Projektionsgeraden p an.
   c) Bestimme die Gleichung der Geraden g', die durch Spiegelung der Geraden g an der Ebene ε entsteht.
   d) Berechne den Schnittwinkel φ der Geraden g mit der Ebene ε.

   [**Lösungen:** a) D(-3/-3/-1) b) p: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) g': $X = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ d) φ = 65,1°]

2. Die zur y-Achse symmetrische Polynomkurve $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$ wird in ihren beiden Wendepunkten von einer Parabel $g(x) = -4x^2 + 4$ berührt.
   a) Diskutiere beide Funktionen und zeichne f in [-2,5 ; 2,5] und g in [-1,5 ; 1,5].
   b) Berechne den Inhalt des von beiden Kurven eingeschlossenen Flächenstücks.

   [**Lösungen:** a) f: $N_{12} = W_{12}$ (±1/0) N_{34} ($\pm\sqrt{5}$/0) H(0/5) T_1 ($-\sqrt{3}$/4) T_2 ($\sqrt{3}$/-4) g: N_{12} (±1/0) H(0/4) b) $A = \frac{16}{15}$]

3. Das allgemeine Viereck ABCD ist gegeben durch a = AB = 61,3 m, d = DA = 94,8 m, α = 104,28°, β = 118,39° und δ = 83,77°. Es ist so in ein flächengleiches Parallelogramm zu verwandeln, daß die Länge der Seite DA und der Winkel α unverändert bleiben.
   Berechnen Sie die Länge der zweiten Seite und die Höhen des Parallelogramms.

   [**Lösungen:** 4eck: b = 127,814 c = 146,903 A = 10 368,459 Parallelogramm: a' = 112,859 h_a' = 91,87 h_d' = 109,371]

4. Eine Urne enthält 5 weiße, 4 blaue und 3 rote Kugeln.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn man dreimal nacheinander mit Zurücklegen zieht,
      a1) jedesmal weiß,
      a2) mindestens eine blaue Kugel,
      a3) jede Farbe genau einmal in der Reihenfolge weiß, blau, rot zu ziehen?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn man dreimal hintereinander ohne Zurücklegen zieht,
      b1) jedesmal blau,
      b2) weiß, blau, rot in beliebiger Reihenfolge,
      b3) zwei weiße und eine blaue Kugel in beliebiger Reihenfolge zu ziehen?

   [**Lösungen:** a1) 7,2% a2) 70,4% a3) 3,5% b1) 1,8% b2) 27,3% b3) 18,2%]

9020 Klagenfurt, BG/BRG „Ingeborg Bachmann" Ferdinand-Jergitsch-Straße 21
Mag. Roland Breitegger

1. Aus zwei Legierungen I und II soll eine Schmelze hergestellt werden, die mindestens 40 kg Cu, 50 kg Zn und 120 kg Cr enthält. Legierung I enthält 20% Cu, 10% Zn, 50% Cr und 20% Al und kostet S 90,-/kg. Legierung II enthält 15% Cu, 30% Zn, 20% Cr und 35% Al und kostet S 75,-/kg.

   Wie kann man unter den gegebenen Bedingungen die billigste Schmelze herstellen?

   [**Lösungen:** I: 200 kg II: 100 kg K_{min}: 25 500,-]

2. Ermittle die unbekannte Koordinate von C so, daß das Dreieck ABC [A(-16/8), B(9/-17), C(12/y>0)] rechtwinkelig mit rechtem Winkel in C ist. Berechne den Flächeninhalt dieses Dreiecks und gib eine Gleichung des Umkreises an. Ermittle den Inkreismittelpunkt.

   [**Lösungen:** C(12/4) A = 300 k_u: $(x+3{,}5)^2 + (y+4{,}5)^2 = 312{,}5$ I(4/-2)]

3. Eine Urne enthält 5 weiße, 4 blaue und 3 rote Kugeln.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn man dreimal nacheinander mit Zurücklegen zieht,

      a1) jedesmal weiß,

      a2) mindestens eine blaue Kugel,

      a3) jede Farbe genau einmal in der Reihenfolge weiß, blau, rot zu ziehen?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn man dreimal hintereinander ohne Zurücklegen zieht,

      b1) jedesmal blau,

      b2) weiß, blau, rot in beliebiger Reihenfolge,

      b3) zwei weiße und eine blaue Kugel in beliebiger Reihenfolge zu ziehen?

   [**Lösungen:** a1) 7,2% a2) 70,4% a3) 3,5% b1) 1,8% b2) 27,3% b3) 18,2%]

4. Einer Kugel vom Radius r ist zuerst ein Drehzylinder mit größtem Mantel und dann ein Drehzylinder mit größtem Volumen einzuschreiben.

   Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächen beider Drehzylinder.

   [**Lösungen:** $r_1 = \frac{r}{\sqrt{2}}$ $h_1 = \frac{2r}{\sqrt{2}}$ $r_2 = \frac{\sqrt{2} \cdot r}{\sqrt{3}}$ $h_2 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$ $O_1 : O_2 = 1 : 1{,}073$]

9020 Klagenfurt, BG/BRG „Ingeborg Bachmann“ Ferdinand-Jergitsch-Straße 21
Mag. Angelika Pessentheiner

1. Zwei Parabeln $f(x) = x^2 + 1$ und $g(x) = 2x^2 - 8$ begrenzen im 1. Quadranten zusammen mit den beiden positiven Achsen ein Flächenstück, das um die y-Achse rotiert.

   a) Berechnen Sie die Masse des Rotationskörpers ($\rho = 7{,}8\ g/cm^3$).

   Eine Eisenkugel mit 4 cm Durchmesser wird in das Gefäß gelegt.

   b) In welcher Höhe berührt die Kugel die Innenwand des Gefäßes?

   c) Wieviel Wasser müßte im Gefäß sein, damit die Kugel gerade vom Wasser bedeckt wird?

   [**Lösungen:** a) 600,36 g b) 4,25 cm c) 27,85 cm^3]

2. Am Pyramidenkogel (851 m Seehöhe) steht ein Aussichtsturm, auf dessen Plattform sich in 46 m Höhe über dem Boden ein Fernrohr befindet, mit dem man einen schönen Blick auf den Wörther See und seine Umgebung hat.
   Dreht man das Fernrohr von Norden um $76{,}7^g$ nach Osten, so sieht man unter einem Tiefenwinkel von $2{,}5^g$ einen Hubschrauber, das Spiegelbild im See erscheint unter einem Tiefenwinkel von $17{,}8^g$. Schwenkt man das Fernrohr um 124^g nach Westen, so erkennt man den Startplatz des Helikopters im Strandbad von Dellach (2 m über dem Wasserspiegel) unter einem Tiefenwinkel von $12{,}6^g$.

   a) In welche exakte Himmelsrichtung ist der geradlinig fliegende Hubschrauber unterwegs?

   b) In welcher Entfernung vom Beobachter und in welcher Seehöhe befand er sich zum Zeitpunkt der Messung?

   Ergebnisse sinnvoll gerundet angeben!

   [**Lösungen:** a) N $110{,}17^g$ O b) Entfernung: 2 802 m Seehöhe: 787 m]

3. Durch die Punkte A(-1/3/-4), B (0/3/4), C(-3/-2/0) und S(5/0/2) ist ein unregelmäßiges Tetraeder gegeben. Dieses Tetraeder wird von einer Ebene ε geschnitten, die durch den Punkt B geht und normal auf die Kante AS steht. Berechnen Sie

   a) die Koordinaten der weiteren Schnittpunkte P_1 und P_2 mit den Tetraederkanten.

   b) den Winkel, den die Kante BS mit der Ebene ε einschließt.

   c) Durch die Ebene wird das gegebene Tetraeder in einen schiefen Pyramidenstumpf und ein kleines Tetraeder zerlegt. Wie verhalten sich die Volumina dieser beiden Figuren zueinander?

   [**Lösungen:** a) P_1 (3/1/0) $\in$ AS P_2 (1/-1/1) $\in$ CS b) 29,12° c) 1 : 5]

4. Bei der Produktion von Rasierapparaten fallen in einem Unternehmen am Standort A erfahrungsgemäß 7% fehlerhafte Stücke an.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 50 getesteten Apparaten mindestens 3 Stück (genau 5 Stück) fehlerhaft sind?

   b) Wie viele Rasierapparate muß man untersuchen, um mit 98%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen fehlerhaften zu finden?

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß unter 900 Apparaten die Anzahl der fehlerhaften Stücke höchstens 43 ist?

   d) Es werden 900 Rasierapparate getestet. In welchem Bereich um den Erwartungswert liegt mit 95%iger Sicherheit die Anzahl der fehlerhaften Stücke?

   e) Am Standort B, wo ähnliche Geräte erzeugt werden, sind 20% fehlerhaft. 70% der Produktion kommen vom Werk A, der Rest vom Werk B. Wie hoch ist die Ausschußquote der Gesamtproduktion? Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein defektes Gerät im Werk A erzeugt worden ist?

   [**Lösungen:** a) 13,6% 68,92% b) 54 c) 0,54% d) [48 ; 78] e) 7,9% 62%]

9020 Klagenfurt, BG/BRG „Ingeborg Bachmann“ Ferdinand-Jergitsch-Straße 21
Mag. Margrit Sibitz

1. Gegeben ist eine Parabel par: $y^2 = 2px$ mit $p = 2$ und ein Ursprungskreis k, der durch den Punkt Q(1/2) geht.
   a) Bestimme die Gleichungen der beiden Kurven.
   b) Das von der Parabel und dem Kreis eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse
   c) bzw. um die y-Achse. Berechne die Volumina der dabei entstehenden Rotationskörper.
   d) Bestimme jenen Punkt R der Parabel, der vom Punkt P(2/1) den geringsten Abstand besitzt und erbringe auch den Beweis dafür.

   [**Lösungen:** a) par: $y^2 = 4x$ k: $x^2 + y^2 = 5$ b) $V_x = 4{,}8\pi$ c) $V_y = 13{,}9\pi$ d) R = Q(1/2)]

2. Die Funktion f: $y = \dfrac{\ln(ax)}{x^2}$ hat an der Stelle $x = \dfrac{\sqrt{e}}{2}$ einen Hochpunkt.
   a) Berechne den Term der Funktion.
   b) Diskutiere die Funktion.
   c) Bestimme den Inhalt der Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse im Intervall $[\frac{1}{2}/e]$.

   [**Lösungen:** a) $y = \dfrac{\ln 2x}{x^2}$ b) $N(\frac{1}{2}/0)$ $H(\frac{\sqrt{e}}{2}/\frac{2}{e})$ W(1,15/0,63) c) A = 1]

3. Gegeben ist die Gerade g: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$, der Punkt P(-1/-6/0) und die Kugel k: $X^2 - 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot X - 52 = 0$.
   a) Wie lautet die Gleichung der Ebene ε, die durch P und g bestimmt wird?
   b) Berechne den Mittelpunkt und den Radius der Kugel.
   c) Bestimme Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises, den die Ebene ε: $3x + 2y - 6z = -15$ aus der Kugel [(4/2/-3) ; 9] herausschneidet.
   d) Wie groß ist der Abstand des Punktes Q(-1/10/10) von der Geraden g?

   [**Lösungen:** a) ε: $3x + 2y - 6z = -15$ b) M(4/2/-3) r = 9 c) M(1/0/3) $r = \sqrt{32}$ d) $d = \sqrt{66}$]

4. a1) Von den zur Matura zugelassen Schülern schaffen erfahrungsgemäß 82% die Matura im Haupttermin. Eine der Klassen hat 16 Schüler. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 14 Schüler im Haupttermin maturieren?
   a2) In den drei Maturaklassen dieses Gymnasiums sind 55 Schüler. 16 haben eine Fachbereichsarbeit geschrieben. Wie viele Schüler dieser Klassen müßte man befragen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Schüler dabei zu haben, der eine Fachbereichsarbeit geschrieben hat, mindestens 0,9 ist?
   b1) Eine Bierabfüllung füllt Halbliterflaschen ($\mu = 500$ cm^3) ab mit einer technisch bedingten Streuung von $\sigma = 2{,}5$ cm^3. Die Abfüllmenge X sei eine normalverteilte Zufallsvariable. Berechne den Ausschuß (!), wenn in einer Flasche zwischen 497 cm^3 und 503 cm^3 Bier enthalten sein muß.
   b2) Welche Toleranzgrenzen müssen gelten, wenn der Ausschuß höchstens 3% betragen darf?

   [**Lösungen:** a1) 0,43 a2) 7 b1) 0,23 b2) [494,58 ; 505,43]]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Lerchenfeldstraße 22
Mag. Gerhard Fugger

1. $x = 2$ ist Extremstelle der Kurve mit der Gleichung $y = x^2 \cdot e^{bx}$.

   a) Zeige, daß $b = -1$.

   b) Diskutiere die Funktion, untersuche auch das Verhalten im Unendlichen und zeichne den Graphen im Intervall [-1; 4].

   c) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das vom Graphen, der x-Achse und der Geraden $x = 4$ begrenzt wird.

   [**Lösungen:** b) a: $y = 0$ N = T(0/0) H(2/0,54) W_1 (0,59/0,19) W_2 (3,41/0,38) c) A = 1,52]

2. Von einem Punkt A(-6/3) werden an die Parabel $y^2 = 12x$ die Tangenten t_1 und t_2 gelegt. Die Tangente t_3 ist parallel zur Geraden durch die Berührpunkte T_1 und T_2 der Tangenten von A mit der Parabel.

   a) Bestimme die Gleichungen der Tangenten und deren Schnittpunkte $B = t_2 \cap t_3$ und $C = t_1 \cap t_3$.

   b) Zeige, daß der Höhenschnittpunkt H dieses Dreiecks ABC auf der Leitlinie der Parabel liegt.

   c) Führe zur Probe die Konstruktion dieser Aufgabe durch (empfohlene Einheit 0,5 cm).

   [**Lösungen:** a) T_1 (12/12) t_1: $y = \frac{1}{2}x + 6$ T_2 (3/-6) t_2: $y = -x - 3$ B($-\frac{3}{2}$/$-\frac{3}{2}$) C(3/$\frac{15}{2}$) b) l: $x = -3$ H(-3/$\frac{3}{2}$)]

3A) Jemand zahlt 15 Jahre lang zu Beginn jeden Monats 1 000 S auf ein Pensionskonto ein. Die Bank garantiert einen konstanten Zinssatz von p = 6% pro Jahr. Die Zinsen werden monatlich dem Kapital gutgeschrieben.

   a) Wie hoch ist der angesparte Betrag am Ende des 15. Jahres? Schreibe zuerst und begründe, warum welche Formel angewendet wird.

   b) Wie hoch ist ein Einmalbetrag, der zu Beginn der 15-jährigen Zeitspanne eingezahlt werden müßte, um den gleichen Endbetrag wie oben zu erhalten?

   c) Wie viele Monate müßte man 1 000 S einzahlen, um am Ende der Laufzeit bei einem Zinssatz von 6% 400 000 S zu erhalten?

3B) Eine Tonbandkassette hat eine Spieldauer von zweimal 30 Minuten. Das Band wird mit einer Geschwindigkeit von 4,8 cm/s abgespielt. Der Innenradius der Spule $r_i = 1$ mm, der Außenradius $r_a = 24$ mm. Berechne die Bandstärke. (Man kann annehmen, daß das Band aus konzentrischen Kreisen besteht. Zeichne eine Skizze, um die entsprechende Summenformel zu begründen.)

   [**Lösungen:** Teil A: a) 288 308,46 b) 120 301,05 c) 222 Monate Teil B: l = 86 400 mm d = 0,0166 mm]

4. Ein multiple-choice-Test enthält 6 Fragen mit je 3 Antworten, von denen nur eine richtig ist. Jemand kreuzt die Antworten zufällig an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

   a) keine, eine, zwei, ..., fünf, sechs Antworten richtig anzukreuzen? Welche Art von Verteilung liegt vor? Begründe! Jede verwendete Variable muß genau definiert werden! Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung durch ein Histogramm grafisch dar.

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens die Hälfte der Fragen richtig beantwortet wird?

   c) Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariablen „Anzahl der richtigen Antworten" zuerst direkt aus der allgemeinen Definition, dann mit Hilfe der Formel für die spezielle Verteilung.

   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 60 derartigen Fragen mindestens die Hälfte richtig zu beantworten?

   e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der richtigen Antworten um höchstens 5 vom Erwartungswert abweicht?

   [**Lösungen:** a) [0,088 0,263 0,329 0,219 0,082 0,016 0,005] b) 0,322 c) $\mu = 2$ $\sigma^2 = \frac{4}{3}$ d) 0,003 e) 0,829]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Lerchenfeldstraße 22
Mag. Hubert Lagler

1a) Bei einer Wohltätigkeitsveranstaltung wird dem Käufer eines Loses versprochen, daß jedes dritte Los gewinnt. Wie viele Lose muß man mindestens kaufen, um mit 90% Sicherheit wenigstens einen Gewinn zu erzielen?

1b) Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Bienenvolk einen harten Winter überlebt, beträgt rund 60%. Ein Imker besitzt zehn Völker. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 7 Bienenvölker einen harten Winter überleben?

1c) Ein Hersteller von Kugelschreibern behauptet, daß nur bei 1% seiner Minen die erzielbare Linienlänge weniger als 1 000 m beträgt. Wie groß ist die mittlere Linienlänge μ, wenn wir voraussetzen, daß sie mit der Standardabweichung $\sigma = 50$ m normalverteilt ist?

1d) Was ist eine normale Körpergröße? Es sei die Körpergröße der Schüler eines Jahrganges mit $\mu = 176$ cm und $\sigma = 5$ cm normalverteilt. Welche Körpergröße ist normal, wenn man die obersten 5% als Riesen, die untersten 5% als Zwerge bezeichnet?

[**Lösungen:** a) 6 b) 0,382 c) 1 116,5 m d) [168 cm ; 184 cm]]

2. Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = x^2 \cdot \ln x$.

Diskutiere die Funktion im Intervall]0 ; 1,5]. Wähle für die Zeichnung passende Einheiten! Berechne weiters den Inhalt der Fläche oberhalb der Kurve zwischen dem Tiefpunkt und der Nullstelle.

[**Lösungen:** N(1/0) T(0,61/-0,18) W(0,22/-0,07) A = 0,05]

3. Von einem Standpunkt P einer horizontalen Ebene sieht man den Berggipfel A um den Sehwinkel $\varepsilon = 0{,}55°$ über den genau davor liegenden Berggipfel B emporragen. Der Höhenwinkel zum Gipfel A wird in diesem Punkt P mit $\alpha = 10{,}49°$ gemessen. Geht man 1 200 m näher, so deckt der Gipfel B gerade den Gipfel A und beide sieht man unter einem Höhenwinkel $\gamma = 16{,}7°$. Fertige eine entsprechende Zeichnung an und berechne die relative Höhe beider Berggipfel. Wie groß ist der Abstand zwischen den Gipfeln auf einer Wanderkarte im Maßstab 1 : 50 000?

[**Lösungen:** $h_A = 580{,}38$ m $h_B = 505{,}68$ m 5 mm]

4. Gegeben ist die Ellipse $x^2 + 2y^2 = 54$ und ein Punkt P(18/-9) außerhalb.

Gesucht sind jene Tangenten, die man vom Punkt aus an die Ellipse legen kann. Berechne weiters die Berührpunkte der Tangenten mit der Ellipse. Der Kegelschnitt rotiert um die x-Achse, wie groß ist das Drehvolumen?

[**Lösungen:** T_1 (-2/-5) t_1: x + 5y = -27 T_2 (6/3) t_2: x + y = 9 $V_x = 264{,}5\pi$]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Lerchenfeldstraße 22
Mag. Otto Sgonc

1. Die Funktion $f(x) = a \cdot x \cdot e^{bx}$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) hat bei $W(2/\frac{12}{e^2})$ einen Wendepunkt.

   a) Beweisen Sie, daß $f(x) = 6 \cdot x \cdot e^{-x}$ eine Termdarstellung dieser Funktion ist.

   b) Untersuchen Sie die Funktion bezüglich Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten.

   c) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen im Intervall [-1;6].

   d) Berechnen Sie den Inhalt jenes Flächenstücks, das vom Graphen von f(x), der x-Achse und den beiden zur y-Achse parallelen Geraden durch den Hoch- bzw. Wendepunkt begrenzt wird.

   e) Dieses Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

   [**Lösungen:** b) N(0/0) $H(1/\frac{6}{e})$ $W(2/\frac{12}{e^2})$ t_W: $y = -\frac{6}{e^2} \cdot (x-4)$ d) A = 1,98 e) $V_x = 12,4$]

2A) Ein 35-jähriger Mann legt zum Aufbau einer späteren Zusatzpension langfristig zu Beginn jeden Jahres 12 000,- auf ein Sparbuch mit einer Verzinsung von 6% p.a.

   a) Auf welchen Betrag ist das verzinste Kapital am Ende des 30. Jahres angewachsen (Zeitgerade, allgemeine Herleitung)?

   b) Wie groß müßte die jährliche Einzahlung sein, damit das Guthaben am Ende des 30. Jahres 2 Millionen Schilling beträgt?

   c) Lösen Sie a) unter Berücksichtigung der 25%igen KEST.

   d) Am Ende des wievielten Jahres wird erstmals ein Guthaben von mindestens 600 000,- erreicht?

2B) Gegeben sei die Zahlenfolge $a_n = \frac{3n^2 + 5n + 1}{4n^2 - 3n + 3}$.

   Bestimmen Sie den Grenzwert a und jenen Index m, von dem ab alle Glieder der Folge in der Umgebung U(a ; 0,05) liegen. Formulieren Sie eine entsprechende Antwort.

   [**Lösungen:** Teil A: a) 1 005 620,13 b) 23 865,87 c) 765 028,65 d) 24 Teil B: $a = \frac{3}{4}$ m = 37]

3. Die Produktion von Festplatten (Harddisk; HD) für Personalcomputer (PC) des Unternehmens NOBIS enthält erfahrungsgemäß 8% „SHORTYS", d.h. Festplatten mit einer deutlich kürzeren Lebensdauer.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß sich unter zehn zufällig ausgewählten Festplatten

      a1) mindestens drei „SHORTYS"

      a2) höchstens zwei „SHORTYS" befinden?

   b) Wie viele Festplatten muß man testen, damit man mit 99%iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen „SHORTY" findet (Ansatz mittels Ungleichung)?

   c) Ein Klagenfurter Elektrogroßmarkt bezieht 50% seiner Festplatten vom Hersteller NOBIS (8% „SHORTYS"), 30% vom Hersteller GATESEA (10% „SHORTYS") und 20% vom Hersteller CONNER (6% „SHORTYS"). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Käufer einer zufällig herausgegriffenen Festplatte einen „SHORTY" erwischt? Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein „SHORTY" vom Hersteller GATESEA? Zeichne ein Baumdiagramm!

   d) Nach Änderungen in der Fertigungstechnik will ein Hersteller den neuen Anteil der „SHORTYS" feststellen. Bestimme den Mindestumfang einer Stichprobe, die es gestattet, diesen Anteil mit 90%-iger Sicherheit auf $\pm$ 0,02 genau zu schätzen.

e) Die Firma HDCHECK, ein neues Unternehmen, hat beim Aufdecken von „SHORTYS“ eine Erfolgswahrscheinlichkeit von 94%. Unter den Festplatten, die der Klagenfurter Großmarkt jährlich bezieht, befinden sich ca. 1 200 „SHORTYS“.

   e1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Firma HDCHECK zwischen 1 120 und 1 140 „SHORTYS“ entdeckt?

   e2) Berechne, wie man die Toleranzgrenzen festsetzen muß, daß die Firma HDCHECK von sich behaupten kann: ‘Uns sind nur 2% aller „SHORTYS“ entgangen!’ Interpretiere das rechnerische Ergebnis.

[**Lösungen:** a1) 0,04 a2) 0,96 b) 53 c) P(S) = 0,082 $P(GS \mid S) = 0{,}366$ d) 1692 e1) 0,762 e2) [1 109 ; 1 147]]

4A) Der Flächeninhalt einer Ellipse in 1. Hauptlage ist allgemein gegeben durch die Formel $A = \pi ab$.

Rotiert diese Ellipse um die Hauptachse, so läßt sich das Volumen des Rotationsellipsoids durch $V = \frac{4\pi}{3} ab^2$ berechnen. Beweisen Sie beide Formeln mittels der Integralrechnung.

4B) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert und formulieren Sie die Regel von de l’Hospital:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 \cdot \cos(2x) - 2 \cdot \cos(x)}{2 \cdot e^x - 2x - 2} =$$

[**Lösungen:** B) -3]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Lerchenfeldstraße 22
Mag. Isolde Sorko-Lacker

1. Der Graph einer reellen Funktion weist im Punkt P(4/4) die Steigung $k = \frac{9}{2}$ auf, die 2. Ableitung der Funktion lautet $f''(x) = \frac{3x}{4}$.

   a) Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von f.

   b) Untersuchen Sie die Funktion f(x) auf Nullstellen, Extrema, Art der Extrema und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen im Intervall [-5;4]. Wie lautet die Gleichung der Wendetangente und welchen Winkel schließt sie mit der x-Achse ein?

   c) Zeigen Sie, daß Hochpunkt, Wendepunkt und ein Schnittpunkt mit der x-Achse Eckpunkte eines gleichschenkeligen Dreiecks sind. Berechnen Sie, wieviel Prozent des Inhalts der vom Graphen und der x-Achse begrenzten Fläche auf dieses Dreieck entfallen.

   [**Lösungen:** a) $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x + 2$ b) N_1 (-4/0) N_2 = T(2/0) H(-2/4) W(0/2) t_W: $y = -\frac{3}{2}x + 2$ $\alpha = 56{,}3°$ c) $A_\Delta = 6$ $A_f = 13{,}5$ 44,4%]

2. Gegeben sind die beiden Kurven k_1: $x^2 + 4y^2 = 100$ und k_2: $y^2 = \frac{8}{3}x$.

   a) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?

   b) Schreiben Sie dem Paraboloid, das durch Rotation der gegebenen Parabel um die x-Achse entsteht, den volumsgrößten Drehkegel ein, dessen Spitze S im rechten Hauptscheitel der gegebenen Ellipse und dessen Basis zwischen S und dem Parabelscheitel liegt. Geben Sie Radius, Höhe und Volumen dieses Drehkegels an.

   c) Welches Volumen besitzt jener Drehkörper, der durch Rotation des von beiden Kurven begrenzten Flächenstücks um die x-Achse entsteht?

   [**Lösungen:** a) S_{12} (6/±4) $\alpha = 39°$ b) r = 3,65 h = 5 $V_{max} = 69{,}813$ c) $V_x = \frac{248\pi}{3}$]

3. Eine Kugel K geht durch den Punkt P(-6/8/9) und berührt die Ebene ε_1 [A(4/4/11), B(8/2/8), C(6/8/7)] im Punkt A. Ermitteln Sie

   a) die Gleichung der Tangentialebene ε_1 in parameterfreier Form sowie die Gleichung der Kugel K.

   b) die Gleichung der Tangentialebene ε_2 an die Kugel im Punkt P und die Größe des Winkels zwischen den beiden Tangentialebenen.

   c) Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises der Kugel mit der Ebene ε_3: 2x - 3y + z = 12.

   [**Lösungen:** a) ε_1: 2x + y + 2z = 34 K: $(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 81$ b) ε_2: -4x + 7y + 4z = 116 $\alpha = 74{,}97°$ c) M_s (0/-2/6) $r_s = \sqrt{67}$]

4. Eine Getränkefirma füllt ihre Produkte unter anderem in Pfandflaschen ab, auf denen ein Inhalt von 1 Liter angegeben ist. Das Volumen der eingefüllten Limonade ist normalverteilt mit dem Mittelwert 1,06 l und der Standardabweichung 0,05 l.

   a) Berechnen Sie, wieviel Prozent der Flaschen weniger als den angegebenen Inhalt aufweisen.

   b) Wie groß müßte der Mittelwert bei gleicher Standardabweichung sein, damit nur 5% der Flaschen einen zu geringen Inhalt aufweisen?

   c) Wieviel Prozent der Flaschen weisen einen Inhalt auf, der größer als 1,1 Liter ist?

   d) Ermitteln Sie, auf welchen Wert man die Standardabweichung durch eine bessere Einstellung, die jedoch nur mit höheren Produktionskosten zu erzielen ist, abändern muß, damit nur 4% der Flaschen mehr als 1,1 Liter Inhalt aufweisen.

   e) Unter 3 000 befragten Personen hat man 375 Konsumenten gefunden, die regelmäßig die 1 l Pfandflasche der Limonade „Megafresh" kaufen. Schätzen Sie daraus den relativen Anteil der „Megafresh" Pfandflaschen-Konsumenten mit 95%-iger Sicherheit.

   [**Lösungen:** a) 11,5% b) 1,082 l c) 21,2% d) 0,023 l e) [0,113 ; 0,137]]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Mössingerstraße 25
Mag. Reinhard Lanner

1. Die Geraden a: $x + y - 9 = 0$, b: $7x + y + 27 = 0$ und c: $7x - 5y - 51 = 0$ sind die Trägergeraden der Seiten eines Dreiecks.

   a) Bestimme die Eckpunkte des Dreiecks.

   b) Bestimme Umkreismittelpunkt U, Schwerpunkt S, Höhenschnittpunkt H sowie die Eulersche Gerade e.

   c) Berechne das Verhältnis US : SH.

   [**Lösungen:** a) A(-2/-13) B(8/1) C(-6/15) b) U($-\frac{19}{3}$ / $\frac{2}{3}$) S(0/1) H($\frac{38}{3}$ / $\frac{5}{3}$) e: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 19 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) US : SH = 1 : 2]

2. Der Graph der Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Punkt P(0/0) und hat im Punkt W(4/4) einen Wendepunkt mit der Wendetangente $3x + y = 16$.

   a) Bestimme die Funktion f(x).

   b) Bestimme die Nullstellen und Extrempunkte dieser Funktion.

   c) Stelle die Funktion samt Wendetangente im Intervall [0;7] grafisch dar.

   d) Wie groß ist die Fläche, die zwischen dem Graphen, der Wendetangente und der y-Achse liegt?

   [**Lösungen:** a) $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$ b) N_1 (0/0) N_2 = T(6/0) H(2/8) c) W(4/4) t_W: $y = -3x + 16$ d) A = 16]

3. Einer Kugel vom Radius R ist das volumsgrößte gerade Prisma einzuschreiben, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Viereck ist.

   Bestimme das Verhältnis der Rauminhalte beider Körper.

   [**Lösungen:** $a = h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ $V_{max} = \frac{8R^3}{3 \cdot \sqrt{3}}$ $V_{max} : V_{Kugel} = 2 : (\pi \cdot \sqrt{3})$]

4. Polizeilichen Statistiken zufolge beträgt der Anteil der Gurtenmuffel 15%.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 12 vorbeifahrenden Autos

      a1) mindestens zwei

      a2) genau vier

      von einem Gurtenmuffel gelenkt werden?

   b) Stelle einen Ausschnitt der Verteilung für 12 vorbeifahrende Autos in einer Tabelle bzw. grafisch dar, wenn man als Zufallsvariable X die Anzahl der Gurtenmuffel und für k Werte zwischen 0 und 8 nimmt (10% = 1 cm).

   c) Wie viele Autos muß man überprüfen, um mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen Gurtenmuffel zu finden?

   [**Lösungen:** a1) 55,66% a2) 6,82% c) 19]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Mössingerstraße 25
Mag. Ulrike Mayrhoffer

1. Diskutiere die Funktion f: $y = 6 \cdot \ln x - 3 \cdot \ln^2 x$.
   a) Berechne Nullstelle(n), Extremwert(e) und Wendepunkt(e) dieser Funktion.
   b) Zeichne den Graphen der Funktion im Intervall $[\frac{1}{e};10]$.
   c) Zeige, daß der Flächeninhalt unterhalb der Kurve im 1. Quadranten ganzzahlig ist.

   [**Lösungen:** a) N_1 (1/0) $N_2 = W(e^2/0)$ H(e/3) c) A = 12]

2. Die Parabel mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitel S(0/6) und geht durch den Punkt $A(3/\frac{9}{2})$.
   a) Ermittle die Funktionsgleichung von f.
   b) Das oberhalb der x-Achse liegende Segment rotiert um die y-Achse. Diesem Paraboloidsegment ist ein Drehkegel mit maximalem Volumen so einzuschreiben, daß seine Spitze in O(0/0) liegt. Berechne Radius und Höhe des Drehkegels.
   c) Dem Paraboloidsegment und dem Drehkegel soll ein weiterer Drehkegel so umschrieben werden, daß alle drei Körper einen gemeinsamen Berührungskreis haben. Die x-Achse begrenzt alle Körper nach unten. Ermittle das Verhältnis der Volumina dieser drei Körper.

   [**Lösungen:** a) $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$ b) $r_1 = 3 \cdot \sqrt{2}$ $h_1 = 3$ c) $r_2 = \frac{9}{\sqrt{2}}$ $h_2 = 9$ $V_1 = 18\pi$ $V_{par} = 108\pi$ $V_2 = \frac{243\pi}{2}$]

3. Zwei Punkte P und Q einer Horizontalebene liegen auf verschiedenen Seiten eines Flusses und sollen durch eine Hängebrücke verbunden werden. Zur Berechnung der Entfernung PQ werden in der gleichen Horizontalebene die Standlinie s = AB = 245 m und die folgenden Winkel gemessen: $\alpha = \angle PAB = 114°10'$, $\beta = \angle QAB = 32°48'$, $\gamma = \angle ABQ = 106°57'$, $\delta = \angle ABP = 37°12'$.
   a) Ermittle die Entfernung PQ auf Meter genau.
   b) Das Hängetau ist um 36,36% länger. Berechne seine Länge auf Meter genau.

   [**Lösungen:** a) 440 m b) 600 m]

4. Bei der Abfüllung von Mehlpaketen sei die Füllmenge normalverteilt. Die eingestellte Sollmenge beträgt 1 020 g, die von der Füllanlage abhängige Standardabweichung σ beträgt 15 g.
   a) Welcher Prozentsatz ist untergewichtig, wenn auf dem Paket 1 000 g angegeben sind? Wieviel Prozent sind schwerer als 1 050 g?
   b) Bei einer Kontrolle wurde festgestellt, daß 95% der Pakete in einem bestimmten Bereich um den eingestellten Wert (1 020 g) lagen. Welches um $\mu = 1\,020$ g symmetrische Toleranzintervall wurde dabei verwendet?
   c) Eine neue Abfüllanlage mit σ 10 g wird angeschafft. Auf welchen Mittelwert μ muß die Maschine eingestellt werden, wenn höchstens 5% aller Pakete weniger als 995 g enthalten sollen?
   d) Welche Standardabweichung dürfte die neue Maschine höchstens haben, wenn maximal 3% aller Pakete um mehr als 10 g von der eingestellten Sollmasse (1 000 g) abweichen sollen?
   e) Definiere die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion.

   [**Lösungen:** a) 9,18% 2,28% b) [991 ; 1 049] c) 1 011,45 g d) 4,61 g]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Mössingerstraße 25
Mag. Susanne Stefan

1. Das Rechteck A(-1/2/3), B(-2/-2/0), C(4/y/-2), D ist Basis einer Pyramide. Die Spitze S liegt senkrecht über dem Eckpunkt D auf der Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 7 \\ -18 \\ 20 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

   a) Berechne die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte C und D.

   b) Berechne die Gleichung der Basisebene ε und den Winkel α, den sie mit der xy-Ebene einschließt.

   c) Berechne die Koordinaten der Spitze S, die Höhe und das Volumen der Pyramide.

   [**Lösungen:** a) C(4/-2/-2) D(5/2/1) b) $2x - 5y + 6z = 6$ $\alpha = 41{,}9°$ c) S(11/-13/19) $h = \sqrt{585}$ $V = 260$]

2. Gegeben sind die Funktionen
   f: $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \to R$, $x \to a \cdot \cos x$, $a \geq 1$ und g: $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}] \to R$, $x \to b \cdot \cos x$,
   deren Graphen einander in den Nullstellen rechtwinkelig schneiden. Erläutere diese Eigenschaft!

   a) Berechne a und b so, daß der von den Kurven eingeschlossene Flächeninhalt $A = \frac{20}{3}$ beträgt und zeichne die Graphen ($E_x = E_y = 2$ cm).

   b) Für welche Werte von a und b hat der Flächeninhalt den kleinsten Wert? Berechne diesen minimalen Flächeninhalt.

   [**Lösungen:** a) $a = 3$ $b = -\frac{1}{3}$ b) $a = 1$ $b = -1$ $A_{min} = 4$]

3. Der Behälter eines Wasserturms hat die Form eines einschaligen Drehhyperboloids. Am Boden hat der Behälter den Durchmesser $6 \cdot \sqrt{5}$ m. In der Höhe 12 m hat er den kleinsten Durchmesser mit 6 m. Die gesamte Höhe des Behälters ist 18 m.

   a) Ermittle die Gleichung der Hyperbel und der Asymptoten (Skizze).

   b) Wieviel m^3 Wasser faßt der Behälter? Wie hoch steht das Wasser im Behälter, wenn sein Inhalt $V = 252\pi$ m^3 beträgt?

   c) Von der Mitte der Deckfläche wird mit einer punktförmigen Lichtquelle in den leeren Behälter geleuchtet. Wieviel Prozent der Bodenfläche werden von den Lichtstrahlen direkt beleuchtet? Zeichne den Achsenschnitt des Lichtkegels in die Skizze ein.

   [**Lösungen:** a) hyp: $4x^2 - y^2 = 36$ u,v: $y = \pm 2x$ b) $V = 1\,017{,}88$ m^3 h = 12 m c) t_{12}: $y = \pm\sqrt{8} \cdot x + 6$ 90%]

4. Die Lebensdauer eines Mopedreifens ist erfahrungsgemäß normalverteilt mit der Standardabweichung 500 km. Die mittlere Lebensdauer eines Reifens beträgt 5 200 km.

   a) Bei wieviel Prozent der Reifen übersteigt die Lebensdauer 6 500 km?

   b) In welchem Toleranzintervall liegt die Lebensdauer eines Reifens mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit?

   c) Wie groß muß die mittlere Lebensdauer einer Produktionsserie sein, damit höchstens 2% der Reifen eine Lebensdauer von weniger als 4 500 km haben?

   d) Definiere und begründe die „Negativitätsregel".

   Aufgrund einer Untersuchung wurde festgestellt, daß 15% der verwendeten Mopeds nicht den technischen Vorschriften entsprechen und somit defekt sind.

   e) Von einem Polizisten werden 20 Mopeds kontrolliert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß weniger als drei defekte darunter sind?

   f) Wie viele Mopeds müssen kontrolliert werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0,98 mindestens ein defektes Moped dabei ist?

   g) Welche Verteilung liegt vor? Nenne zwei grundlegende Merkmale dieser Verteilung.

   [**Lösungen:** a) 0,47% b) [4220 ; 6180] c) 5527,5 km e) 40,49% f) 25 g) Binomialverteilung]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Völkermarkter Ring 27
Mag. Thomas Goritschnig

1. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide liegt in der Ebene ε: $4x + y + z = 25$. Die Gleichungen der Trägergeraden zweier Seitenkanten lauten

   g: $X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   Die dritte Seitenkante steht auf die Grundfläche normal.

   a) Bestimme alle Eckpunkte der Pyramide.

   b) Berechne das Volumen der Pyramide mit Hilfe der Formel $V = \frac{G \cdot h}{3}$.

   c) Welchen Winkel schließen die Seitenkanten mit der Grundfläche ein?

   [**Lösungen:** a) S(11/12/5) A(7/-4/1) B(2/6/11) C(3/10/3) b) V = 180 c) $\alpha = 30°$ $\beta = 43{,}41°$ $\gamma = 90°$]

2. Die Kurve $y = x^2 + 1$, die Hyperbel $25x^2 - 4y^2 = 100$ und die Gerade $y = 8$ bilden im 1. Quadranten ein endliches Flächenstück. Rotiert diese Fläche um die y-Achse, entsteht ein vasenförmiger Drehkörper.

   a) Fertige eine Zeichnung an (Einheit E = 1 cm) und berechne das Fassungsvermögen dieser Vase.

   b) Berechne die Höhe des Wasserstandes, wenn sich 50 ml Wasser im Gefäß befinden.

   c) Berechne die Masse des Gefäßes, wenn es aus Kupfer hergestellt wird ($\rho = 8{,}9$ g/cm^3).

   [**Lösungen:** a) $V_y = 76{,}97$ cm^3 b) 6,64 cm c) 973,22 g]

3. Diskutiere die Funktion f: $y = (x^2 - 4) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$ und zeichne ihren Graphen.

   Berechne den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das im 1. Quadranten von f, der x-Achse und der Senkrechten durch den Hochpunkt begrenzt wird.

   [**Lösungen:** a: y = 0 N_{12} (±2/0) T(-0,83/-5,01) H(4,83/1,73) W_1 (0,54/-2,84) W_2 (7,47/1,24) A = 3,43]

4. Zwei Orte A und B liegen in einer Ebene 12,5 km voneinander entfernt. Ein Flugzeug, das im geraden Horizontalflug über die beiden Orte direkt hinwegfliegt, wird gleichzeitig in A unter dem Höhenwinkel 79,5° und in B unter dem Höhenwinkel 37,94° gemessen. 30 Sekunden später wird eine zweite Peilung vorgenommen und es werden die Höhenwinkel in A mit 38,83° und in B mit 77,28° gemessen. Bestimme (ohne Berücksichtigung der Instrumentenhöhe) die Höhe h und die Geschwindigkeit v des Flugzeuges.

   [**Lösungen:** h = 8,52 km v = 1 080 km/h]

5. Man hat festgestellt, daß medizinisch wertlose Tabletten, sogenannte „Placebos“, bei vielen Patienten die gleiche Wirkung erzielen wie gleichaussehende, echte Tabletten. Von 8 echten Beruhigungstabletten werden 3 durch Placebos ersetzt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt ein Patient bei 5 verabreichten Tabletten

   a) mindestens 1 Placebo?

   b) höchstens 2 Placebos?

   In einer anderen Klinik weiß man, daß 60% derjenigen Patienten, die Beruhigungsmittel nehmen, auf Placebos ansprechen. Es werden 10 Patienten zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß

   c) 6 Patienten

   d) höchstens 3 Patienten

   auf Placebos ansprechen?

   [**Lösungen:** a) 0,982 b) 0,821 c) 0,251 d) 0,055]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Völkermarkter Ring 27
Mag. Iris Mallweger-Grasser

1. Gegeben ist die Kurve k_1: $y = \frac{8}{x^2}$ $(x \neq 0)$.

   a) Bestimme für die Kurve k_2: $y = ax^2 + bx$ die Koeffizienten so, daß sich die Kurven in P(2/y) rechtwinkelig schneiden.

   b) Das Flächenstück, das von der x-Achse, den beiden Kurven und der Geraden $x = t$ $(t > 2)$ begrenzt wird, rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?

   c) Gib jene Punkte der Kurve k_1 an, die vom Ursprung den geringsten Abstand haben. Wie groß ist dieser Abstand?

   d) Berechne die Nullstellen und die Extremstelle von k_2, gib eine Wertetabelle von k_1 in [-6;6] an und zeichne den Graphen beider Funktionen und die Tangenten an k_1 und k_2 im Punkt P.

   [**Lösungen:** a) k_2: $y = \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{2}$ b) $\frac{4\pi}{3} \cdot (\frac{31}{5} - \frac{16}{t^3})$ c) P_{12} (±2,245/1,587) $d_{min} = 2{,}749$ d) keine Nullstelle T(0/$\frac{3}{2}$)]

2. An der Feldkirchner Straße in Klagenfurt soll wegen der Errichtung eines Parkplatzes ein Teil des Grundstückes mit der Nummer 247/10 KG Lendorf abgelöst werden. Von diesem viereckigen Grundstück sind folgende Daten bekannt:
   Das Grundstück hat die Grenzpunkte A, B, C und D; AB = 210 m, AD = 130 m, BD = 200 m, $\angle$ABC = 73°45'. Der Flächeninhalt des Grundstücks beträgt 2 ha 22 a. Durch eine Parallele zu CD soll ein 20 m breiter Streifen EFCD abgetrennt werden.

   a) Zeichne das Grundstück im Maßstab 1 : 2000.

   b) Berechne den Flächeninhalt des Streifens.

   c) Berechne, wie viele ATS der Grundstückseigentümer als Ablöse erhält, wenn $1m^2$ mit ATS 168 bewertet wird.

   [**Lösungen:** b) 2 561,2 m^2 c) ATS 430 282]

3. Die Punkte A(0/0/0), B(3/-2/1), C(2/1/-1), E(4/4/0) sind Eckpunkte eines Parallelepipeds ABCDEFGH.

   a) Ermittle die fehlenden Eckpunkte und die Länge der Raumdiagonale BH.

   b) Berechne die Gleichung der Basisebene ABCD und den Flächeninhalt der Basis.

   c) Berechne die Länge der Höhe und das Volumen des Körpers.

   d) Berechne die Koordinaten der Spitze eines Tetraeders mit $h = 10 \cdot \sqrt{3}$, wenn das Dreieck ABC die Grundfläche und D der Fußpunkt der Höhe des Tetraeders ist. Wie groß ist des Volumen des Tetraeders?

   [**Lösungen:** a) D(-1/3/-2) F(7/2/1) G(6/5/-1) H(3/7/-2) BH = $\sqrt{90}$ b) ε: $x + 5y + 7z = 0$ A = $\sqrt{75}$ c) $h = \frac{24}{\sqrt{75}}$
   V = 24 d) S_1 (1/13/12) S_2 (-3/-7/-16) V = 25]

4. Ein Gefäß hat die Form eines Drehparaboloids. Dieses Gefäß hat die Höhe h = 9 cm und einen oberen Durchmesser d = 12 cm. In dieses Gefäß werden 0,5 Liter Wasser gegossen.

   a) Wie hoch steht das Wasser im Gefäß?

   b) Eine Kugel mit dem Radius 4 cm wird in das Gefäß getaucht, bis sie die Gefäßwände berührt. Wieviel Raum bleibt unter der Kugel frei?

c) Für ein Faß mit parabolischen Dauben gilt die Volumsformel

$$V = \frac{2\pi h}{15} \cdot (8R^2 + 4Rr + 3r^2)$$

mit 2h = Faßhöhe, 2R = Spunddurchmesser und 2r = Bodendurchmesser.
Beweise diese Volumsformel mit Hilfe der Integralrechnung.

[**Lösungen:** a) $5 \cdot \sqrt{10}$ cm b) $\frac{14\pi}{3}$]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Völkermarkter Ring 27
Mag. Carmen Rauter

1a) Leiten Sie die Flächeninhaltsformel der Ellipse mit Hilfe der Integralrechnung her.

1b) Einem Ellipsoid, das durch Drehung der Ellipse $12x^2 + 25y^2 = 225$ um die x-Achse entsteht, soll ein Zylinder mit maximalem Volumen eingeschrieben werden. Das Ellipsoid erhält eine Durchbohrung entlang der x-Achse, wobei der Bohrradius gleich dem Zylinderradius ist. Berechnen Sie das Volumen des ringförmigen Restkörpers.

[**Lösungen:** a) $A = \pi ab$ b) $r = \sqrt{6}$ $h = 5$ $V_{max} = 30\pi$ $V_{Rest} = 10\pi$]

2. Das Dreieck ABC [A(2/2/3), B(5/-2/1), C(3/6/-1)] ist Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ABCS, deren Mantelkanten AS, BS und CS gleich lang sind. Die Höhe beträgt 6 E.

a) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide sowie die Koordinaten von S.

b) Geben Sie die Gleichung der Umkugel an.

c) Berechnen Sie die Neigungswinkel der Mantelkante AS zur Grundfläche.

[**Lösungen:** a) V = 36 S_1 (8/4/4) S_2 (0/0/4) b) $(x-5)^2 + (y-2,5)^2 + (z-1)^2 = 20,25$ c) 54,736°]

3. Eine Fabrik erzeugt auf zwei Maschinen Getränkeflaschen. Die Maschine M_1 erzeugt 55% aller Flaschen und hat einen Ausschuß von 8%. M_2, eine ältere Maschine, hat einen Ausschuß von 15%.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine zufällig aus der Gesamtproduktion herausgezogene Flasche schadhaft ist (Baumdiagramm)?

b) Unter wieviel Flaschen ist mit 95% Sicherheit mindestens eine schadhafte Flasche?

c) Die Flaschen werden in Kisten zu 20 Stück gestellt. Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß dabei höchstens 2 schadhafte Flaschen sind.

Die Flaschen sind Pfandflaschen und können wiederverwendet werden. Die Zahl, wie oft eine Flasche wiederverwendet wird, sei normalverteilt mit einem Erwartungswert von $\mu = 36$ und einer Standardabweichung von $\sigma = 6$.

d) Wie wahrscheinlich ist es, daß eine Flasche weniger als 24 mal wiederverwendet wird?

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, daß eine Flasche öfter als 30 mal verwendet wird.

f) Auf welchen Wert müßte die mittlere Wiederverwendung gesteigert werden (z.B. durch besseres Rückgabesystem oder Materialverbesserung), damit die Wahrscheinlichkeit, eine Flasche öfter als 30 mal wiederzuverwenden, mindestens 95% wird?

[**Lösungen:** a) 0,112 b) 26 c) 0,611 d) 0,023 e) 0,841 f) 39,87]

4a) Leiten Sie die Zerfallsgleichung für den radioaktiven Zerfall ab und stellen Sie den Zusammenhang zwischen der Halbwertszeit und der Zerfallskonstanten her.

4b) 12 Jahre nach Tschernobyl: 1986 betrug die Strahlenbelastung in Schladming nach dem Reaktorunfall 13,8 mSv/a. Berechnen Sie, wie hoch die Belastung heute ist, wenn man annimmt, daß das Isotop ^{137}Cs, das eine Halbwertszeit von 30,1 Jahren hat, dafür verantwortlich ist.

4c) Wie lange wird es noch dauern, bis die durch Tschernobyl verursachte zusätzliche Belastung so hoch ist wie die natürliche Belastung von etwa 1 mSv/a?

[**Lösungen:** a) $N = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ $\tau = \frac{\ln 0,5}{-\lambda}$ b) 10,468 mSv/a c) im Jahr 2100]

9020 Klagenfurt, BORG Hubertusstraße 1
Mag. Maria Dörfler

1. Bei den Olympischen Spielen treten 10 Sportschützen an. Sechs von ihnen haben eine „Treffsicherheit" von 85%, drei von 75% und einer von nur 60%.

   a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem Durchgang (jeder schießt einmal)

      a1) alle treffen,
      a2) mindestens einer trifft,
      a3) genau 9 treffen.

   b) Die 6 besten Schützen schießen je einmal. Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der Treffer an. Stelle diese Verteilung grafisch dar.

   c) Wie oft muß einer der besten Schützen schießen, um mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal zu treffen?

   [**Lösungen:** a1) 0,095 a2) 0,999 999 929 a3) 0,261 b) [0,00001 0,00039 0,006 0,035 0,176 0,399 0,377] c) 3]

2. Eine zur zweiten Achse symmetrische Polynomfunktion 4. Grades hat in E einen Extrempunkt. Der Flächeninhalt des von den beiden positiven Koordinatenachsen und der Kurve eingeschlossenen Flächenstückes beträgt $\frac{64}{15}$.

   a) Wie lautet die Polynomfunktion?

   b) Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen.

   c) Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der ersten Achse rotiert um die erste Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

   [**Lösungen:** a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ b) $N_{12} = T_{12}$ $(\pm 2/0)$ H(0/4) W_{12} $(\pm 1{,}15/1{,}78)$ c) $V_x = 26{,}006\pi$]

3. Gegeben sind ein Kreis durch die Gleichung k: $x^2 + y^2 - 14x + 6y = -8$ und der Punkt P(-8/2).

   a) Gib den Mittelpunkt M und den Radius r des Kreises k an.

   b) Gib die Gleichungen der Tangenten von P an den Kreis k an.

   c) Berechne den Winkel zwischen den beiden Tangenten.

   d) Fertige eine genaue Zeichnung an.

   [**Lösungen:** a) M(7/-3) $r = 5\cdot\sqrt{2}$ b) t_1: $x - 7y = -22$ t_2: $x + y = -6$ c) $\alpha = 53{,}13°$]

4. Eine zylindrische Konservendose, die 1 Liter fassen soll, soll möglichst kostengünstig hergestellt werden. Die Herstellungskosten für Boden- und Deckenfläche betragen 4 Groschen/cm^2, jene für die Wand 2,5 Groschen/cm^2.

   a) Wie müssen die Maße der Dose gewählt werden, damit die Kosten für die Herstellung möglichst gering gehalten werden können?

   b) Gib das Verhältnis zwischen Höhe und Durchmesser der Dose an.

   c) Zeichne den Graphen der Funktion K(r) in einem geeigneten Intervall.

   d) Erläutere die Vorgangsweise bei Extremwertaufgaben.

   [**Lösungen:** a) r = 4,633 h = 14,827 $K_{min} = 161{,}87$ b) h : d = 1,6 : 1]

9020 Klagenfurt, BORG Hubertusstraße 1
Mag. Ute Holl

1. Die Gerade g: $x = 6$ schneidet von der Hyperbel $3x^2 - 4y^2 = 12$ ein Segment ab, dem das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben ist, daß 2 Eckpunkte auf der Sehne, die beiden anderen auf der Hyperbel liegen. Berechne die Fläche dieses Rechtecks. Berechne weiters, welches Rechteck in obiger Lage bei Rotation um die x-Achse einen Zylinder von größtem Volumen ergibt. Berechne dieses Volumen. Weise dieses Maximum nach.

   [**Lösungen:** Rechteck: $a = 2{,}438$ $b = 5{,}104$ $A_{max} = 12{,}447$ Zylinder: $r = 3{,}306$ $h = 1{,}691$ $V_{max} = 58{,}042$]

2. Gegeben ist das Dreieck ABC [A(-6/0), B(4/2), C(4/-10)].

   a) Ermittle die Gleichung des Kreises k_f durch die Seitenmittelpunkte M_{AB}, M_{AC}, M_{BC} (Feuerbachkreis).

   b) Zeige, daß auf dem Kreis die Höhenfußpunkte F_a, F_b, F_c liegen (Beweis für einen Höhenfußpunkt).

   c) Zeige, daß U, H, S und F (Mittelpunkt von k_f) auf der Eulerschen Geraden liegen.

   [**Lösungen:** a) k_f: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 13$ b) F_a (4/0) F_b (-2/-4) $F_c\left(\frac{22}{13} / \frac{20}{13}\right)$ c) U(0/-4) H(2/0) $S\left(\frac{2}{3} / -\frac{8}{3}\right)$ e: $2x - y = 4$]

3. Höhe und Position eines zwischen Neunkirchen und Wiener Neustadt fliegenden Heißluftballons sollen durch Vermessen der beiden an der Neunkirchner Allee gelegenen Fixpunkte der Landvermessung (Abstand 10 km) bestimmt werden. Der eine Fixpunkt A (Wiener Neustadt) erscheint unter einem Tiefenwinkel $\alpha = 26{,}6°$, nach Schwenken des Fernrohrs um $\varepsilon = 112°$ erscheint der andere Fixpunkt B (Neunkirchen) unter dem Tiefenwinkel $\beta = 47{,}2°$.

   Berechne die Position des Ballons bezüglich der beiden Fixpunkte und berechne weiters, wie groß diese Abstände auf einer Karte im Maßstab 1 : 50 000 sind.

   [**Lösungen:** x = 8,000 km = 16,0 cm y = 3,710 km = 7,4 cm]

4. Eine Polynomfunktion 3. Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung und schneidet sie an der Stelle 3. Der Inhalt der Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse in [0;3] beträgt $\frac{9}{4}$ Einheiten.

   Berechne f(x) und diskutiere die Funktion. Berechne weiters das Volumen, das bei Rotation der angegebenen Fläche um die x-Achse entsteht.

   [**Lösungen:** $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$ $N_1 = T(0/0)$ N_2 (3/0) $H\left(2/\frac{4}{3}\right)$ $W\left(1/\frac{2}{3}\right)$ t_W: $y = x - \frac{1}{3}$ $V_x = \frac{81\pi}{35}$]

9020 Klagenfurt, BORG Hubertusstraße 1
Mag. Ute Holl

1. Eine Polynomfunktion 3. Ordnung berührt die x-Achse im Ursprung und schneidet sie an der Stelle 3. Der Inhalt der Fläche zwischen der Funktion und der x-Achse in [0;3] beträgt $\frac{9}{4}$ Einheiten.

   Berechne f(x) und diskutiere die Funktion. Berechne weiters das Volumen, das bei Rotation der angegebenen Fläche um die x-Achse entsteht.

   [**Lösungen:** $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2$ $N_1 = T(0/0)$ $N_2\,(3/0)$ $H(2/\frac{4}{3})$ $W(1/\frac{2}{3})$ t_W: $y = x - \frac{1}{3}$ $V_x = \frac{81\pi}{35}$]

2. Ein Viereck ABCD ist gegeben durch $a = AB = 75$ m, $d = AD = 82$ m, $\alpha = \angle DAB = 108{,}3°$, $\beta = \angle ABC = 15{,}6°$ und $\delta = \angle CDA = 66{,}5°$.

   a) Berechne Umfang und Fläche des Vierecks.

   b) Das Viereck ist so in ein flächengleiches Parallelogramm zu verwandeln, daß die Seite BC und der Winkel β unverändert bleiben. Berechne die Länge der 2. Seite und die Höhe des Parallelogramms.

   [**Lösungen:** a) b = 72,979 c = 132,827 U = 362,806 A = 7 462,266 b) $a_1 = 113{,}383$ $h_a = 65{,}814$]

3. Gegeben ist das Dreieck ABC [A(-2/-9), B(7/3), C(-7/3)].

   a) Berechne den Umkreis und den Inkreis des Dreiecks.

   b) Zeige weiters, daß U, H und S auf der Eulerschen Geraden liegen.

   c) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

   [**Lösungen:** a) k_u: $x^2 + (y+\frac{9}{8})^2 = \frac{4225}{65}$ k_i: $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 16$ b) $H(-2/-\frac{3}{4})$ $S(-\frac{2}{3}/-1)$ e: $3x + 16y = -18$ c) A = 84]

4. In einer Urne befinden sich 7 rote, 4 blaue und 5 schwarze Kugeln.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn man dreimal nacheinander ohne Zurücklegen zieht,

      a1) jedesmal rot zu ziehen?

      a2) schwarz-rot-blau in beliebiger Reihenfolge zu ziehen?

      a3) 2 rote und eine blaue in beliebiger Reihenfolge zu ziehen?

   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, wenn dreimal nacheinander mit Zurücklegen gezogen wird,

      b1) jedesmal schwarz zu ziehen?

      b2) mindestens eine schwarze Kugel zu ziehen?

      b3) genau eine rote Kugel zu ziehen?

      b4) Wie viele Ziehungen muß man durchführen, daß man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens eine schwarze Kugel zieht (Binomialverteilung)?

   [**Lösungen:** a1) 0,0625 a2) 0,25 a3) 0,15 b1) 0,031 b2) 0,675 b3) 0,415 b4) 13]

9020 Klagenfurt, BORG Hubertusstraße 1
Mag. Anton Srienz

1. Ein Wohnwagenhersteller stellt drei Typen von Caravans her. Die Grundmontage erfolgt im Werk I, die Herstellung der Inneneinrichtung im Werk II. Die Anzahl der Arbeitsstunden, die für die Herstellung eines Wohnwagens erforderlich sind, die Gesamtzahl der zur Verfügung stehenden Arbeitsstunden im Monat sowie die Gewinne je Wohnwagen sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt:

	Arbeitszeit für einen Wohnwagen			Gesamtzahl der zur Verfügung stehenden Stunden
	Typ A	Typ B	Typ C	
Werk I	40	60	20	11 200
Werk II	80	60	40	17 600
Gewinn	40 000	50 000	20 000	

Die Firma stellt im Monat insgesamt 300 Wohnwagen her. Vom Typ A können höchstens 120, vom Typ B höchstens 100 Wohnwagen im Monat produziert werden.

Wie viele Wohnwagen müssen von jedem Typ im Monat hergestellt werden, damit der Gewinn möglichst groß wird?

[**Lösungen:** [100 80] G_{max} = 10 400 000,-]

2. Eine Folge hat ein Bildungsgesetz der Form $\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{b \cdot n - 5}{1 - c \cdot n} \right\rangle$ mit b, c $\in$ R. Die ersten Glieder der Folge sind $\left\langle \frac{3}{2}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{8}, \ldots \right\rangle$.

   a) Ermittle das Bildungsgesetz der Folge.

   b) Stelle eine Vermutung über das Monotonieverhalten der Folge auf und beweise diese.

   c) Zeige, daß $\frac{3}{2}$ Supremum der Folge ist.

   d) Ermittle den Grenzwert α der Folge und gib an, ab welchem Index alle Glieder der Folge in $U(\alpha\,,\ \varepsilon = \frac{1}{100})$ liegen.

[**Lösungen:** a) $\left\langle \frac{2n-5}{1-3n} \right\rangle$ b) streng monoton fallend d) $\alpha = -\frac{2}{3}$ $n_\varepsilon = 145$]

3. Eine gebrochen rationale Funktion hat die Form $f(x) = \frac{-x^2 + ax + b}{2x + 4}$. Die dazugehörige Kurve besitzt im Punkt P(0/1) die Steigung $k = \frac{1}{4}$.

   Bestimme die Gleichung der Kurve und diskutiere sie. Berechne den Inhalt der Fläche, die der Funktionsgraph mit der x-Achse im Intervall [-1;4] einschließt.

[**Lösungen:** $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{2x + 4}$ a_1: x = -2 a_2: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ N_1 (-1/0) N_2 (4/0) T(-4,45/5,95) H(0,45/1,05) kein Wendepunkt A = 3,375]

4. Bei der Abfüllung von Waschmittelpaketen sei die Füllmenge normalverteilt. Die eingestellte Sollmasse beträgt 1 020 g, die von der Füllanlage abhängige Standardabweichung σ beträgt 15 g.

   a) Welcher Prozentsatz ist untergewichtig, wenn auf dem Paket 1 000 g angegeben sind?
   b) Wieviel Prozent sind schwerer als 1 050 g?
   c) Bei einer Kontrolle wurde festgestellt, daß 95% der Pakete in einem bestimmten Bereich um den eingestellten Wert (1 020 g) lagen. Welches um μ (1 020 g) symmetrische Toleranzintervall wurde dabei verwendet?
   d) Eine neue Abfüllanlage mit $\sigma = 10$ g wird angeschafft. Auf welchen Mittelwert μ muß die Maschine eingestellt werden, wenn höchstens 5% aller Pakete weniger als 995 g enthalten sollen?
   e) Welche Standardabweichung dürfte die neue Maschine höchstens haben, wenn maximal 3% aller Pakete um mehr als 10 g von der eingestellten Sollmasse (1 000 g) abweichen sollen?

   [**Lösungen:** a) 9,2% b) 2,3% c) [990 ; 1 049] d) 1 012 g e) 4,6 g]

9020 Klagenfurt, ORG St. Ursula, Ursulinengasse 5
Dr. Peter Antonitsch

1. **Funktionenlehre - Differential- und Integralrechnung**

a) Diskutiere die Exponentialfunktion f: $R \to R$, $x \to (4-2x)\cdot e^{\frac{x}{2}}$ und skizziere den Funktionsgraphen im „interessanten Bereich“.

b) Berechne den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das vom Funktionsgraphen, der x-Achse und der Wendetangente begrenzt wird.

c) Berechne das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das Flächenstück aus (b) um die x-Achse rotiert.

d) Erläutere (inkl. Skizze) die Begriffe „Riemann-Summe“ bzw. „Riemann-Integral“ am Beispiel der Berechnung krummlinig begrenzter Flächen und erkläre den Zusammenhang zwischen diesen.

[**Lösungen:** a) N(2/0) H(0/4) W(-2/2,94) t_W: $y = \frac{2}{e}x + \frac{12}{e}$ b) A = 18,803 c) V_x = 177,771]

2. **Trigonometrie**

Von einem viereckigen Grundstück ABCD kennt man die Länge der drei Seiten a = AB = 630 m, b = BC = 600 m und d = DA = 140 m sowie die beiden Winkel $\alpha = \angle DAB = 87°$ bzw. $\beta = \angle ABC = 115°$.

a) Fertige eine genaue Zeichnung im Maßstab 1 : 5 000 an und bezeichne alle Größen, die bei den nachfolgend durchzuführenden Rechnungen auftreten.

b) Berechne die Länge der fehlenden Seite, der Diagonalen und die fehlenden Winkel.

c) Eine durch A verlaufende Gerade soll das Grundstück in zwei gleich große Flächen teilen. Berechne, wie weit der auf der Seite BC liegende Endpunkt E dieser Teilungsstrecke von C entfernt ist. Begründe auch den gewählten Rechenweg.

d) In (b) verwendest Du (vermutlich auch) den Cosinussatz. Beweise diesen in der Form $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos(\gamma)$.
Anleitung: Fertige eine passende Skizze an.

[**Lösungen:** b) c = 965 m e = 1 037,5 m f = 638,18 m γ = 40,38° δ = 117,62° c) A = 231 144,1 m^2 CE = 195,18 m]

3. **Analytische Geometrie**

Gegeben ist das Dreieck ABC [A(-5/-6), B(9/-4), C(-5/10)].

a) Konstruiere für das gegebene Dreieck den Umkreismittelpunkt, den Höhenschnittpunkt und den Schwerpunkt und lies deren Koordinaten aus der Zeichnung ab.

b) Überprüfe die in (a) konstruktiv ermittelten Koordinaten von Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt durch Rechnung und gib die Gleichung des Umkreises an.

c) Die exakten Koordinaten des Schwerpunktes sind S($-\frac{1}{3}$/0). Zeige rechnerisch, daß Schwerpunkt, Umkreismittelpunkt und Höhenschnittpunkt auf einer gemeinsamen Geraden - der sogenannten Eulerschen Geraden - liegen.

d) In jedem Dreieck ist der Abstand eines Eckpunktes vom Höhenschnittpunkt doppelt so groß wie der Abstand des Umkreismittelpunktes von der dem Eckpunkt gegenüberliegenden Seite. Zeige die Richtigkeit dieser Behauptung für alle drei Eckpunkte des obigen Dreiecks.

[**Lösungen:** b) U(1/2) H(-3/-4) k_u: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 100$ c) e: 6x - 4y = -2 d) AH = $2\cdot\sqrt{2}$ = 2·Ua BH = 12 = 2·Ub CH = $10\cdot\sqrt{2}$ = 2·Uc]

4. **Wahrscheinlichkeitsrechnung**

In einer Großstadt sind erfahrungsgemäß 8% der S-Bahn-Fahrgäste „Schwarzfahrer“.

a) Bei einer Kontrolle werden 5 Personen „zufällig“ ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von diesen 5 Personen mindestens zwei keinen Fahrschein haben?

b) Es sei X = „Anzahl der Schwarzfahrer unter den 5 zufällig gewählten Fahrgästen“. Berechne den Erwartungswert von X und erkläre die Bedeutung des Erwartungswertes.

c) Wie viele Fahrgäste müssen mindestens kontrolliert werden, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen ohne Fahrschein zu erwischen, mindestens 95% beträgt?

d) Ein S-Bahn-Waggon ist mit 50 Personen einer Reisegruppe besetzt. Der Reiseleiter weiß, daß 4 Personen aus der Reisegruppe (aus welchen Gründen auch immer) keinen Fahrschein besitzen. Wie groß ist aus seiner Sicht die Wahrscheinlichkeit, daß bei Kontrolle von 5 „zufällig“ aus der Reisegruppe gewählten Personen mindestens zwei keinen Fahrschein haben?

e) Erkläre, inwiefern sich die Fragestellung in (d) von der in (a) unterscheidet.

[**Lösungen:** a) 0,054 b) E(X) = 0,4 c) 36 d) 0,045 e) Ziehung (a) mit / (d) ohne Zurücklegen]

9020 Klagenfurt, ORG St. Ursula, Ursulinengasse 5
Mag. Walter Sumper

1. Von einem Fenster, das die Gestalt eines Rechtecks mit aufgesetztem Halbkreis hat, kennt man den Gesamtumfang U = 6 m.

   Wie müssen Breite und Gesamthöhe des Fensters gewählt werden, damit sein Lichteinfall (= Flächeninhalt) maximal ist?

   [**Lösungen:** b = h = 1,68 m $A_{max} = 2{,}52\ m^2$]

2. Gegeben ist das Dreieck ABC [A(-4/-6), B(10/-4), C(-4/10)].

   a) Berechne die Gleichung eines Kreises, der durch die Punkte A, B und den Höhenschnittpunkt H des Dreiecks ABC geht.

   b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und lege von P(2/2) aus die Tangenten an den Kreis $x^2 + y^2 - 8x + 24y + 60 = 0$.

   [**Lösungen:** a) H(-2/-4) k: $(x-4)^2 + (y+12)^2 = 100$ b) A = 112 t_1: 4x - 3y = 2 t_2: 3x + 4y = 14]

3. Zwei in derselben Horizontalebene liegende Orte A und B sollen durch eine geradlinige Eisenbahnlinie miteinander verbunden werden, die zwischen den Punkten T_1 und T_2 durch einen Tunnel führt. Zur Bestimmung der Tunnellänge T_1T_2 wird ein in derselben Horizontalebene liegender Punkt P abgesteckt.

   a) Berechne die Tunnellänge T_1T_2, wenn im Gelände folgende Daten gemessen werden: a = PA = 5 750 m, b = PB = 6 410 m, $\alpha = \angle APB = 98{,}27°$, $\beta = \angle APT_1 = 25{,}03°$ und $\gamma = \angle BPT_2 = 26{,}03°$.

   b) Welche Geldmittel sind für den Tunnelbau vorzusehen, wenn 1 km Tunnel ATS 250 000 000,- kostet?

   [**Lösungen:** a) T_1T_2 = 3 468,72 m b) ATS 997 257 000,-]

4. Der Graph einer reellen Funktion enthält den Punkt P(5/2), die erste Ableitung der Funktion lautet $f'(x) = \frac{3}{8} \cdot (x^2 - 10x + 21)$.

   a) Ermittle die Funktionsgleichung von f(x) und zeichne den Graphen im Intervall [0;9].

   b) Zeige, daß Hochpunkt, Wendepunkt und die linke Nullstelle Eckpunkte eines gleichschenkeligen Dreiecks sind.

   c) Berechne, wieviel % des Inhalts der vom Graphen und der x-Achse begrenzten Fläche auf dieses Dreieck entfallen.

   [**Lösungen:** a) $f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^3 - 15x^2 + 63x - 49)$ b) N_1 (1/0) N_2 = T(7/0) H(3/4) W(5/2) $N_1H = N_1W = 2 \cdot \sqrt{5}$

   c) $A = \frac{27}{2}$ $A_\Delta = 6$ 44,44%]

9020 Klagenfurt, ZG/ZRG za Slovence Prof.-Janežič-Platz 1
Mag. Magda Errenst

1. **Diskusija racionalne funkcije**

Graf funkcije f: $R \to R$, $f(x) = \dfrac{ax}{x^2 + b}$ gre skozi točko $P(4/\frac{4}{3})$. V točki Q(0/y) je vzpon -1.

a) Določi enačbo funkcije f.
b) Diskutiraj funkcijo f in nariši njen graf v [-6;6].
c) Določi kot med navpično asimptoto in tangento v obračaju.

[**Rešitve:** a) $f(x) = \dfrac{4x}{x^2 - 4}$ b) a_{12}: $x = \pm 2$ N = W(0/0) t_W: y = -x c) 45°]

2. **Trigonometrija**

Poznamo dolžine stranic AB = a = 8 m, BC = b = 6 m, AD = d = 7 m in kote $\angle DAB = \alpha = 75°$ in $\angle ABC = \beta = 60°$ četverokotnika ABCD.

a) Določi ploščino in obseg četverokotnika.
b) Če podaljšamo stranico AD čez oglišče D in stranico BC čez oglišče C, se podaljšani stranici sekata v točki F.
   b1) Določi ploščino trikotnika CDF.
   b2) Določi oddaljenost točke F od stranic AB oz. CD četverokotnika.

[**Rešitve:** a) c = 3,552 A = 32,981 U = 24,552 b1) γ = 146,15° A_{CDF} = 4,875 b2) Fa = 9,464 Fc = 2,745]

3. **Analitična geometrija**

Dan je krog k: $x^2 + y^2 = 50$.

a) Določi enačbi tangent t_1 in t_2 na krog k, ki gresta skozi točko P(8/6).
b) Določi enačbi tangent t_3 in t_4 na krog k, ki gresta skozi točko Q(-10/0).
c) Nariši.
d) Pokaži, da so dotikališča T_1, T_2, T_3, T_4 oglišča enakokrakega trapeca.
e) Pokaži, da so tangente t_1, t_2, t_3, t_4 nosilke stranic deltoida.
f) Določi razmerje med ploščinama trapeca in deltoida.

[**Rešitve:** a) T_1 (1/7) T_2 (7/-1) t_1: x + 7y = 50 t_2: 7x - y = 50 b) T_3 (-5/5) T_4 (-5/-5) t_3: x - y = -10 t_4: x + y = -10
d) $T_1T_3 \parallel T_2T_4$ $T_1T_2 = T_3T_4 = 10$ e) S_{13} $(-\frac{5}{2}/\frac{15}{2})$ S_{24} (5/-15) $PQ \perp S_{13}S_{24}$ f) A_T = 90 A_D = 225 $A_T : A_D = 2 : 5$]

4. **Transcendentalna funkcija - prostornina vrtenine**

Dana je funkcija f: $R \to R$, $f(x) = (4 - 2x) \cdot e^{\frac{x}{2}}$.

a) Določi ničlo, ekstrem, obračaj in enačbo tangente v obračaju.
b) Nariši funkcijo.
c) Ploščina, ki leži med grafom, osjo x in tangento v obračaju, se vrti okli osi x. Določi prostornino vrtenine.

[**Rešitve:** a) N(2/0) H(0/4) W(-2/2,94) t_W: $y = \frac{2}{e}x + \frac{12}{e}$ c) V_x = 177,771]

9020 Klagenfurt, ZG/ZRG za Slovence Prof.-Janežič-Platz 1
Dr. Nikolaus Ottowitz

1. **Analitična geometrija v ravnini - trikotnik**

Premice a: $7x - y = -66$, b: $y = -4$ in c: $x + y = 2$ so nosilke stranic tricotnika ABC.

a) Določi računsko in konstruktivno koordinate središča trikotniku očrtanega kroga U, sečišča višin H in težišča S.

b) Določi enačbo trikotniku očrtanega kroga k in enačbo Eulerjeve premice e.

c) Preveri računsko in grafično, da so točke U, H in S na Eulerjevi premici e in da velja razmerje US : SH = 1 : 2.

d) Konstruiraj z enoto E = 1 cm.

[**Rešitve:** a) A(6/-4) B(-8/10) C(-10/-4) U(-2/2) H(-8/-2) S(-4/$\frac{2}{3}$) b) k_u: $(x+2)^2 + (y-2)^2 = 100$ e: $2x - 3y = -10$]

2. **Analiza - diskusija transcendente funkcije - ploščina**

Dana je funkcija $f(x) = \frac{3}{2}x \cdot e^{-x+2}$.

a) Določi ničlo, ekstrem, obračaj in enačbo tangente v obračaju. Nariši grafa funkcije in tangente v obračaju v intervalu [-0,5;7] z enoto E = 1 cm.

b) Določi ploščino, ki jo oklepajo tangenta v obračaju, graf funkcije in ordinata os.

[**Rešitve:** a) N(0/0) H(1/4,08) W(2/3) t_W: $3x + 2y = 12$ b) A = 2,416]

3. **Analitična geometrija v ravnini - elipsa - vrtenina - naloga z ekstremno vrednostjo**

Dani sta dolžina stranske polosi in linearna ekscentričnost elipse v prvi glavni legi (b = 3, e = 4).

a) Določi enačbo elipse, koordinate glavnih in stranskih temen in koordinate gorišč.

b) Nariši elipso s temenskimi pritisnjenimi krogi z enoto E = 1 cm.

c) Elipsa se vrti okoli ordinate osi. Izračunaj prostornino V_y nastalega sploščenega rotacijskega elipsoida.

d) Elipsoidu vpišemo valj z isto osjo tako, da je njegova prostornina V_v maksimalna. Izračunaj polmer, višino in prostornino tega valja. Kolikšno je razmerje $V_v : V_y$?

[**Rešitve:** a) $9x^2 + 25y^2 = 225$ c) $V_y = 100\pi$ d) $V_v : V_y = 1 : \sqrt{3}$]

4. **Integralni račun**

Reši integral najprej nedoločeno (napravi preskus), nato med danima mejama.

$$\int_5^6 \frac{2x^4 + 11x^3 - 11x^2 - 109x - 82}{x^3 + 5x^2 - 8x - 48}\,dx$$

[**Rešitve:** 11,722]

9063 Maria Saal, BG Tanzenberg
Mag. Horst Grollitsch

1. Eine Metallhobelmaschine stellt Platten her; die Plattendicke X (in mm) läßt sich als Zufallsvariable auffassen, die normalverteilt ist. Sie hat für eine gewisse Maschineneinstellung den Mittelwert $\mu = 10$ mm und die Standardabweichung $\sigma = 0{,}02$ mm.

   a) Wieviel Prozent Ausschuß sind zu erwarten, wenn die Platten mindestens 9,97 mm stark sein sollen?

   b) Wie muß man die Toleranzgrenze $\mu \pm \varepsilon$ wählen, damit man nicht mehr als 5% Ausschuß erhält? (Runden Sie auf Hundertstel genau.)

   c) Wie ändert sich der Ausschußprozentsatz der oben bestimmten Toleranzgrenzen, wenn sich μ durch Abnützung der Maschineneinstellung nach 10,01 mm hin verschiebt?

   Interpretieren Sie die Ergebnisse.

   [**Lösungen:** a) 6,68% b) [9,96 mm ; 10,04 mm] c) 7,3%]

2. Von einem Dreieck ABC kennt man A(-12/-4), den Mittelpunkt M_a(1/7) von BC und den Umkreismittelpunkt U(-4/2).

   a) Berechnen Sie die fehlenden Eckpunkte B und C.

   b) Zeigen Sie die Gültigkeit folgender Aussage: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt H an den Dreiecksseiten, so liegen die gespiegelten Punkte H_a, H_b, H_c auf dem Umkreis des Dreiecks.

   c) Was versteht man beim Dreieck unter der Eulerschen Geraden? (Was gilt bei dieser Geraden?)

   [**Lösungen:** a) k_u: $(x+4)^2 + (y-2)^2 = 100$ B(6/2) C(-4/12) b) H(-2/6) H_a (2/10) H_b (-10/10) H_c (2/-6)]

3. Die Funktion $f(x) = (a + bx)\cdot e^x$ hat den Hochpunkt H(1/e).

   a) Berechnen Sie a und b.

   b) Diskutieren Sie die Funktion und zeichnen Sie den Graphen in [-3 ; 2,2].

   c) Wie groß ist die Fläche, die die Kurve mit den Achsen im 1. Quadranten einschließt?

   [**Lösungen:** a) $f(x) = (2-x)\cdot e^x$ b) N(2/0) H(1/e) W(0/2) f'(0) = 1 c) $A = e^2-3 = 4{,}389$]

4. Von einem viereckigen Grundstück sind folgende Abmessungen bekannt: a = AB = 1592 m, b = BC = 1166 m, d = AD = 1265 m, $\alpha = \angle DAB = 71{,}57°$, $\beta = \angle ABC = 59{,}03°$.

   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Grundstückes und die Länge der Umzäunung.

   b) Das Grundstück soll durch eine von A ausgehende Teilungslinie in zwei flächengleiche Teile zerlegt werden. Berechnen Sie, wie weit der auf der Seite b liegende Endpunkt E der Teilungslinie von B entfernt ist.

   [**Lösungen:** a) $A \approx 119{,}12$ ha $U \approx 4648$ m b) $BE \approx 872{,}6$ m]

9073 Klagenfurt-Viktring, BRG Stift-Viktring-Straße 25
Mag. Herbert Lientschnig

1. Ein Fernheizkraftwerk liegt an einer geradlinigen Straße, von der nach 500 m Entfernung senkrecht abzweigend ein 220 m langer Feldweg zu einem Haus führt. Das Haus soll an das Fernheizsystem angeschlossen werden. Der Laufmeter Verlegung kostet längs der Straße 450 Schilling, abseits der Straße jedoch 750 Schilling.

   In welcher Entfernung vom Heizwerk muß die Abzweigung von der Straße erfolgen, damit die Kosten für die Verlegung minimal werden? Um wie viele Schilling teurer ist der Preis für eine direkte Verlegung?

   [**Lösungen:** 335 m K_{min} = 357 000,- Δ = 52 695,-]

2. Eine gebrochen rationale Funktion f: $y = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + 7}$ geht durch die Punkte A(-1/-2), B(1/-2) und C(-5/-18).

   a) Erstelle die Funktionsgleichung und diskutiere die Funktion.

   b) Zeichne den Graphen der Funktion im Intervall [-10;7]. Wähle als Zeicheneinheit auf der x-Achse 1 cm und auf der y-Achse 0,5 cm.

   c) Berechne jene Fläche, die von der Kurve und der schiefen Asymptote zwischen x = -2 und x = 4 eingeschlossen wird.

   [**Lösungen:** a) f: $y = \frac{2x^2 - 4x - 16}{2x + 7}$ a_1: $x = -\frac{7}{2}$ a_2: $y = x - \frac{11}{2}$ N_1 (-2/0) N_2 (4/0) H(-6,85/-15,71) T(-0,15/-2,29) kein Wendepunkt c) A = 18,106]

3. Von einem dreieckigen Grundstück in Hanglage mit den Eckpunkten A, B und C kennt man folgende Bestimmungsstücke: AB = 60 m, $\angle CAB = 75{,}72°$. Vom tiefsten Punkt A aus wird der um 10 m höher liegende Punkt C unter dem Höhenwinkel $\alpha = 7{,}73°$ gesehen. Vom Punkt C aus wird der Punkt B unter dem Tiefenwinkel $\beta = 2{,}07°$ gesehen.

   a) Bestimme die Längen der Seiten des Grundstücks (auf cm genau) und auf m^2 genau dessen Flächeninhalt.

   b) Um wie viele m liegt der Eckpunkt B höher als A und tiefer als C?

   c) Dem Besitzer des Grundstückes wird ein Kaufangebot unterbreitet. Anzahlung sofort 600 000 Schilling, 10 Jahresraten (Zinssatz: 6%) jeweils 100 000 Schilling. Soll der Besitzer annehmen, wenn er den derzeitigen Wert des Grundstückes mit 1 400 000 Schilling annimmt?

   [**Lösungen:** a) AC = 74,34 m BC = 82,75 m A = 2 161,29 m^2 b) 2,98 m 7,01 m c) Barwert: 1 336 009,-]

4. Die Geraden a: 2x - y = 13, b: x + 2y = -6 und c: 2x + y = -9 sind Trägergeraden der Seiten des Dreiecks ABC.

   a) Berechne die Koordinaten der Eckpunkte und die Innenwinkel des Dreiecks.

   b) Berechne den Flächeninhalt und zeichne das Dreieck.

   c) Ermittle die Gleichung des Umkreises.

   d) Berechne den Höhenschnittpunkt.

   [**Lösungen:** a) A(-4/-1) B(1/-11) C(4/-5) $\alpha = 36{,}86°$ $\beta = 53{,}14°$ $\gamma = 90°$ b) A = 30 c) $(x+1{,}5)^2 + (y+6)^2 = 31{,}25$ d) H = C]

9073 Klagenfurt-Viktring, BRG Stift-Viktring-Straße 25
Dr. Maria Posch

1. Für die nuklearmedizinische Untersuchung der Schilddrüse wurde früher das radioaktive Isotop Jod-131 mit der Halbwertszeit $T_{1/2} = 8$ Tage verwendet.

   a) Stelle das Zerfallsgesetz auf, zeichne die Zerfallskurve (wähle einen passenden Maßstab) und zeige, daß die Funktion, die den Zerfall beschreibt, für $t > 0$ streng monoton fallend ist.

   b) Wie ist die Zerfallsgeschwindigkeit definiert? Berechne sie für J-131 und zeige, daß sie proportional zur Anzahl der noch vorhandenen Kerne ist.

   c) Auf wieviel Prozent des Anfangswertes sinkt die Belastung für den Patienten nach einem Tag?

   d) Heute wird anstelle von J-131 Technetium-99 mit einer Halbwertszeit $T_{1/2} = 6$ Stunden verwendet. Auf welchen Anteil des Anfangswertes sinkt die Belastung damit nach einem Tag? Wie lange dauert es bei J-131, bis derselbe Prozentsatz erreicht ist? Welche Bedeutung hat das für den Patienten?

   [**Lösungen:** a) $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,08664t}$ b) $N'(t) = -0,08664 \cdot N(t)$ c) 91,7% d) 6,25% 32 Tage]

2. Gegeben sind eine Hyperbel in erster Hauptlage durch $a = 3$ cm und $e = 4$ cm sowie die Gerade $g: x = 7$.

   a) Wie lautet die allgemeine Hyperbeldefinition? Konstruiere nach dieser Definition mindestens vier Punktepaare des rechten Hyperbelastes und beschreibe die Konstruktionsschritte.

   b) Schreibe dem Segment, das die Gerade von der Hyperbel abschneidet, das flächengrößte Rechteck so ein, daß zwei Eckpunkte auf der Sehne und die beiden anderen auf der Hyperbel liegen. Bestimme die Fläche des Rechtecks.

   c) Die Tangenten in diesen Eckpunkten bilden mit der zu g parallelen Rechteckseite ein Dreieck. Zeige, daß die Dreieckfläche halb so groß ist wie die des Rechtecks.

   [**Lösungen:** b) $A_{max} = A(4,5) = 14,79$ c) t_{12}: $31,5x \pm 26,62y = 63$]

3. Beim Roulettespiel fällt eine Kugel auf eine der 37 Zahlen 0, 1, 2, ..., 36. Alle diese Zahlen treten mit derselben Wahrscheinlichkeit auf. Setzt ein Spieler auf eine bestimmte Zahl, so erhält er das 36-fache seines Einsatzes, falls die Kugel auf diese Zahl fällt. Andernfalls ist sein Einsatz verloren.

   a) Berechne für jede der beiden folgenden Spielstrategien den Erwartungswert:
      - Spieler I spielt dreimal und setzt jedesmal 100 S auf die Zahl 17.
      - Spieler II setzt beim ersten Spiel 100 S auf die Zahl 17. Falls er gewinnt, bricht er das Spiel ab. Falls er verliert, verdoppelt er den vorhergehenden Einsatz und spielt weiter, jedoch höchstens dreimal.

   b) Was bedeutet der jeweilige Erwartungswert?

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Spieler I mindestens eines der drei Spiele gewinnt? Wie viele Spiele wären erforderlich, damit er mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal gewinnt?

   [**Lösungen:** a) I: -8,11 S II: -18,20 S c) 0,079 85 Spiele]

4. Gegeben ist die Funktion $f: x \to 0{,}1 \cdot x^2 \cdot (6 - x)$.

   a) Zeichne den Graphen im Intervall [0,6]. Welchen Einfluß hat der Faktor 0,1 auf diesen?

   b) Schätze den Inhalt der Fläche, die von der Funktion im gegebenen Intervall festgelegt wird, durch Unter- und Obersummen ab (zerlege das Intervall in 6 gleich lange Teilintervalle).

   c) Ermittle einen Näherungswert für den Flächeninhalt mit Hilfe einer Zwischensumme (6 Teilintervalle; Höhe des Rechtecks = Funktionswert im Mittelpunkt des Teilintervalls).

   d) In wie viele Teilintervalle muß das Intervall [0;6] zerlegt werden, um eine Genauigkeit von 0,01 zu erreichen?

   e) Berechne den Inhalt der Fläche mit Hilfe einer Stammfunktion von f.

   [**Lösungen:** b) U = 7,3 O = 13,7 c) S = 10,95 d) 3 840 e) 10,8]

9073 Klagenfurt-Viktring, BRG Stift-Viktring-Straße 25
Mag. Gabriela Rieger

1. Diskutiere die Funktion f: $[0;3\pi] \to R$, $x \to e^{-x} \cdot \sin x$ (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und Gleichung der Wendetangente in einem (beliebig gewählten) Wendepunkt) und berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von f zwischen den ersten beiden positiven Nullstellen mit der x-Achse einschließt. Zeichne den Graphen von f im Intervall [-0,5; π].

   [**Lösungen:** N(k·π/0) H_1 ($\frac{\pi}{4}$/0,32) T($\frac{5\pi}{4}$/-0,014) H_2 ($\frac{9\pi}{4}$/0,0006) W_1 ($\frac{\pi}{2}$/0,208) W_2 ($\frac{3\pi}{2}$/-0,009) W_3 ($\frac{5\pi}{2}$/0,0004) t_1: 0,21x + y = 0,535 A = 0,023]

2. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide ABCS liegt in der Ebene ε: 4x - y + 8z = 1 mit dem Basiseckpunkt A(-4/-9/a_3). Gegeben sind weiters die Gleichungen der Trägergeraden g: $X = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$ und h: $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ der beiden durch die Punkte B und C der Grundfläche gehenden Seitenkanten.

   a) Ermittle die Koordinaten aller Eckpunkte.
   b) Berechne den Flächeninhalt der Grundfläche ABC.
   c) Berechne das Volumen der Pyramide.
   d) Ermittle die Koordinaten des Fußpunktes F der Höhe.
   e) Bestimme den Neigungswinkel α der Seitenkante AS zur Grundfläche.

   [**Lösungen:** a) A(-4/-9/1) B(3/3/-1) C(6/-1/-3) S(-2/6/10) b) A = 36 c) V = $\frac{260}{3}$ d) F(-5,21/6,80/3,58) e) α = 65,78°]

3. Ein Grundstück hat die Form eines Vierecks ABCD: a = AB = 50 m, b = BC = 28,9 m, $\alpha = \angle DAB = 75{,}8°$, $\beta = \angle ABC = 84{,}2°$, $\gamma = \angle BCD = 103{,}9°$. Mache eine Skizze!

   a) Berechne den Winkel $\delta = \angle CDA$, die Diagonale e = AC, die Seiten c und d und den Flächeninhalt dieses Grundstückes.
   b) Zwei Käufer vereinbaren folgende Aufteilung: die Teilungslinie soll durch die Punkte E (= Halbierungspunkt der Seite AB) und F (= Halbierungspunkt der Seite CD) gehen. Berechne den Kostenunterschied bei einem m^2-Preis von 250,-

   [**Lösungen:** a) δ = 96,1° e = 55,165 c = 38,808 d = 35,299 A = 1 399,85 b) A_1 = 665,75 A_2 = 734,099 $\Delta \approx$ 17 100,-]

4. Eine Hyperbel in erster Hauptlage mit den Asymptoten $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot x$ geht durch den Punkt P($\sqrt{19}$/3).

   a) Gib die Gleichung der Hyperbel an und berechne ihre Schnittpunkte mit der Ellipse ell [a = 5, e = $\frac{\sqrt{75}}{2}$] in erster Hauptlage.
   b) Zeichne beide Kegelschnitte (Näherungskonstruktion, Koordinaten der Schnittpunkte verwenden).
   c) Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Kurven?
   d) Die linsenförmige Fläche, die von der Ellipse und einem Hyperbelast im ersten und vierten Quadranten begrenzt wird, rotiert um die x- und y-Achse. Berechne das Verhältnis der entstehenden Volumina V_x und V_y.

   [**Lösungen:** a) hyp: $x^2 - 2y^2 = 1$ ell: $x^2 + 4y^2 = 25$ S_{1234} (±3/±2) c) 57,426° d) $V_x = \frac{23\pi}{3}$ $V_y = 64\pi$ $V_y : V_x = 192 : 23$]

9073 Klagenfurt-Viktring, BRG Stift-Viktring-Straße 25
Mag. Josef Schumann

1. Der Graph einer Polynomfunktion vierten Grades ist symmetrisch bezüglich der zweiten Achse und geht durch den Punkt P(0/4). Im Punkt Q(4/0) hat er eine zur ersten Achse parallele Tangente.

   a) Gib die Funktionsgleichung an.

   b) Gib die Nullstellen, die Extremstellen und die Wendepunkte an. Zeichne dann den Graphen im Intervall [-5;5].

   c) Berechne den Flächeninhalt des vom Graphen und von der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks.

   d) Erkläre die Begriffe „linksgekrümmt" bzw. „rechtsgekrümmt" und untersuche diesbezüglich die obige Funktion.

   [**Lösungen:** a) $y = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$ b) $N_{12} = T_{12}$ ($\pm$4/0) H(0/4) W_{12} ($\pm$2,31/1,78) c) A = 17]

2. Um die Längenausdehnung eines Sees zu bestimmen, werden von einem 634 m hohen Berg zu zwei an den Enden gelegenen Geländepunkten A und B folgende Vermessungen vorgenommen: Von der Bergspitze aus sieht man A unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 22{,}5°$ und nach Schwenken des Meßinstruments um den Horizontalwinkel $\gamma = 77{,}3°$ den Punkt B unter dem Tiefenwinkel $\beta = 25{,}7°$.

   a) Fertige eine Skizze an.

   b) Wie lang ist der See?

   c) Wie weit sind A und B von der Bergspitze entfernt?

   [**Lösungen:** b) 1 786,5 m c) a = 1 656,7 m b = 1 462 m]

3. Von einer Hyperbel in erster Hauptlage sind der Punkt P(-3/4) und die Gleichung einer Asymptote 2x - y = 0 gegeben.

   a) Bestimme die Gleichung der Hyperbel.

   b) Welche Punkte der Hyperbel haben vom Ursprung den Abstand 5?

   c) Lege durch die Punkte (x > 0) die Tangenten an die Hyperbel und berechne den Winkel, den sie miteinander einschließen.

   d) Fertige eine Skizze an.

   [**Lösungen:** a) $4x^2 - y^2 = 20$ b) P_{1234} ($\pm$3/$\pm$4) c) t_{12}: $3x \pm y = 5$ $\alpha = 143{,}13°$]

4. Polizeilichen Statistiken zufolge beträgt der Anteil der Autolenker, die während der Fahrt keinen Sicherheitsgurt tragen, 15% („Gurtenmuffel"). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von 12 vorbeifahrenden Autos

   a) genau 4 Autos von einem Gurtenmuffel gelenkt werden?

   b) mindestens 2 Autos von einem Gurtenmuffel gelenkt werden?

   c) Wie viele Autos muß man überprüfen, um mit mindestens 95% Wahrscheinlichkeit mindestens einen Gurtenmuffel zu finden?

   [**Lösungen:** a) 0,068 b) 0,557 c) 19]

9100 Völkermarkt, BG/BRG Pestalozzistraße 1
Mag. Alfred Janesch

1. Gegeben ist die Funktion f: $R \to R$, $y = \ln(x^2+1) - 2$.

   a) Diskutiere die Funktion (Nullstellen, Extremwert, Wendepunkte, Wendetangenten) und zeichne ihren Graphen im Intervall [-5;5].

   b) Der Graph von f rotiert im Abschnitt $-2 \le y \le 1$ um die y-Achse und bildet eine Schale. Wie groß ist ihr Volumen?

   [**Lösungen:** a) N_{12} (±2,53/0) T(0/-2) W_{12} (±1/-1,31) t_{12}: y = ±x - 2,31 b) V_y = 50,534]

2. Der Graph der Funktion f: $y = \frac{1}{8}x^2$ wird im Punkt P(4/y) von einem Kreis berührt, dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt.

   a) Ermittle die Kreisgleichung.

   b) Berechne den Inhalt jener Fläche, welche von der Funktion f, dem Kreis k und der x-Achse begrenzt wird.

   c) Die x-Achse, die durch den Kreismittelpunkt gehende Parallele zur y-Achse, der Graph der Funktion f von 0 bis P und der anschließende Kreisbogen begrenzen ein Flächenstück. Berechne das Volumen des Drehkörpers, der durch Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht.

   [**Lösungen:** a) $(x-6)^2 + y^2 = 8$ b) A = 1,683 c) $V_x = \frac{248\pi}{15}$]

3. Gegeben ist das Dreieck ABC [A(-1/1), B(11/6), C(-1/15)].

   a) Berechne die Koordinaten des Schwerpunktes S, des Höhenschnittpunktes H und des Umkreismittelpunktes U und zeige, daß diese drei Punkte auf einer Geraden liegen.

   b) Bestimme die Gleichung des Inkreises.

   [**Lösungen:** a) S(3/$\frac{22}{3}$) H($\frac{11}{4}$/6) U($\frac{25}{8}$/8) e: 16x - 3y = 26 b) k_i: $(x-3)^2 + (y-7)^2 = 16$]

4. Ein viereckiges Grundstück ABCD mit den Maßen a = AB = 56,4 m, d = AD = 97,0 m, α = 104,5°, β = 121,3°, δ = 81,2° soll im Zuge einer Grenzvereinfachung in ein flächengleiches Parallelogramm umgewandelt werden. Die Strecke AD und der Winkel α sollen unverändert bleiben.

   a) Wie groß wird die zweite Seite des Parallelogramms?

   b) Wieviel m Zaunlänge kann man sich durch die Grenzvereinfachung ersparen?

   [**Lösungen:** a) A = 10 126,62 m^2 x = 107,83 m b) U_{alt} = 427,86 m U_{neu} = 409,66 m Ersparnis: 18,2 m]

5. 97% der verkauften Milchflaschen werden zurückgebracht und wiederbefüllt. Der Rest wird weggeworfen oder muß wegen Beschädigung ausgeschieden werden. Aus diesem Grund müssen die Molkereien jeweils 3% der abgefüllten Milch in neuen Flaschen ausliefern, die jedoch zufällig unter die alten gemischt werden.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Kiste mit 12 Milchflaschen
      a1) keine
      a2) mindestens zwei
      a3) höchstens zwei
      neue Milchflaschen zu bekommen?

   b) Wie viele Flaschen muß man kaufen, um mit 90% Wahrscheinlichkeit mindestens eine neue darunter zu haben?

   c) Nach durchschnittlich wie vielen Umläufen sind von 144 Flaschen nur mehr 12 vorhanden?

   [**Lösungen:** a1) 0,694 a2) 0,049 a3) 0,995 b) 76 c) 82]

9100 Völkermarkt, BG/BRG Pestalozzistraße 1
Mag. Peter Micheuz

1. In eine halbkugelförmige Schale mit dem Radius $r = 13$ cm tropfen aus einem undichten Wasserhahn einen ganzen Tag lang alle 5 Sekunden Tropfen mit einem Volumen von 0,2 cm^3.
   a) Wieviel % des Fassungsvermögens der Schale macht diese Flüssigkeitsmenge aus?
   b) Ermittle die Höhe des Wasserspiegels mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens auf mm genau.
   c) Leite die in b) verwendete Formel für das Volumen eines Kugelabschnitts mit Hilfe der Integralrechnung her.

   [**Lösungen:** a) 75% b) 10,8 cm c) $V = \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3r-h)$]

2. Ein Querfeldein-Biker-Wettbewerb führt vom Start A weg über eine gerade, asphaltierte Straße bis zu einem von den intelligenten Bikern gewählten Abzweigpunkt X und von dort in gerader Linie über unwegsameres Gelände zum Ziel B. Die kürzeste Entfernung des Ziels B zu dem auf der Straße liegenden Punkt C beträgt 5 km. Dieser Punkt C ist vom Start A 12 km entfernt.
   a) Wie viele km vom Start A entfernt muß der intelligente Biker abzweigen, wenn er auf der Straße mit 30 km/h und im Gelände mit 10 km/h unterwegs ist, um (theoretisch) in kürzester Zeit zum Ziel zu gelangen?
   b) Wie lange ist er unterwegs und um wie viele Minuten ist er schneller, als wenn er direkt vom Start weg geradlinig das Ziel C angepeilt hätte?

   [**Lösungen:** a) 10,22 km b) t_{min} = 52,28 min Ersparnis: 26 min]

3. Der globale Handyboom kann durch folgende Fakten belegt werden: Waren es im Jahre 1990 noch 11,2 Millionen Handy-Besitzer, so sind es 1997 bereits 210 Millionen. Prognosen sagen für das Jahr 2005 eine Milliarde Handy-Besitzer voraus.
   a) Weise nach, daß diese Prognose nicht mit dem Modell der Exponentialfunktion $f(t) = c \cdot e^{kt}$ erstellt wurde. Wie viele Handy-Besitzer müßte es nach diesem Modell im Jahr 2005 geben?
   b) Wie viele Handy-Besitzer müßte es 1997 gegeben haben, wenn der Anstieg von 1990 bis 2005 linear wäre unter der Annahme, daß die Prognose stimmt?
   c) Zeige, daß die logistische Funktion $g(t) = \dfrac{1120}{1 + 100 \cdot e^{-kt}}$ obigen Bedingungen am besten entspricht. Ermittle vorher k aus einer der Bedingungen. Stelle diese Funktion graphisch dar und berechne auf zwei Arten, wie viele Handys nach diesem Modell im Jahre 2000 verkauft werden.

   [**Lösungen:** a) 5,981 Milliarden b) 472 Millionen c) k = 0,4483 124 Millionen]

4. Von den Punkten A und B auf den Flachdächern zweier Hochhäuser kann man einen in die Straße eingelassenen Kanaldeckel C, der mit A und B in derselben Vertikalebene liegt, anvisieren. Von A aus erscheint er unter dem Tiefenwinkel $\propto = 60°$, von B aus unter dem Tiefenwinkel $\beta = 35°$. Der tiefer gelegene Punkt B erscheint von A aus unter dem Tiefenwinkel 25°.
   Das Hochhaus A ist 50 m hoch.

   Berechne die Höhe des Hochhauses B sowie die waagrechte Entfernung beider Gebäudefassaden.

   [**Lösungen:** h_B = 21,93 m d = 60,19 m]

5. Ein Eignungstest besteht aus zwei Teilen, von denen der erste aus 5 Fragen mit je 3 Antwortmöglichkeiten besteht und im zweiten Teil 80 Fragen mit JA oder NEIN zu beantworten sind. Der antretende Kandidat weiß nichts und versucht, alle Antworten zu erraten.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ihn, den ersten Teil (mindestens 3 richtige Antworten) zu bestehen?

   b) Aus wie vielen Fragen müßte der erste Teil bestehen, damit der Kandidat mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit wenigstens eine Frage richtig beantwortet?

   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht er den zweiten Teil, wenn mindestens 60% der JA-NEIN-Fragen richtig beantwortet werden müssen?

   d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit errät er beim zweiten Teil genau die Hälfte der Fragen?

   [**Lösungen:** a) 0,21 b) 12 c) 0,037 d) 0,087]

9100 Völkermarkt, BG/BRG Pestalozzistraße 1
Mag. Othmar Winter

1a) Das Kohlenstoffisotop C-14 ist radioaktiv mit einer Halbwertszeit zwischen τ_1 = 5 690 Jahren und τ_2 = 5 770 Jahren. Es ist im lebenden Organismus in einem konstanten Anteil enthalten. Nach dem Tod verringert sich der Anteil durch radioaktiven Zerfall entsprechend dem Zerfallsgesetz $N_t = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ (N_0 ... Anzahl der ursprünglich vorhandenen Kerne, N_t ... Anzahl der zum Zeitpunkt t vorhandenen Kerne, λ ... Zerfallskonstante).

a1) Drücken Sie die Halbwertszeit τ durch die Zerfallskonstante λ aus.

a2) Ein Tierskelett hat nur noch 17% des ursprünglichen C-14 Anteils. Wie alt ist dieses Skelett mindestens bzw. höchstens?

a3) Wieviel Prozent ist der C-14 Anteil nach 25 000 Jahren mindestens bzw. höchstens?

1b) Der radioaktive Anteil einer Substanz hat zu Beginn einer Beobachtung eine Zerfallsgeschwindigkeit von -1,4 g/d. Zehn Tage später ist diese nur mehr -0,35 g/d.

b1) Stellen Sie das Zerfallsgesetz für diese Substanz auf und berechnen Sie Halbwertszeit und Anfangsmenge dieser Probe.

b2) Wie groß war dieser radioaktive Anteil zwei Tage vor Beginn der Beobachtung?

b3) Nach welcher Zeit (auf Minuten genau) werden noch immer 10% radioaktiver Anteil übrig sein?

[**Lösungen:** a1) $\tau = \frac{-\ln 0{,}5}{\lambda}$ a2) 14 548 .. 14 754 a3) 4,76% .. 4,97% b1) $N(t) = 10{,}1 \cdot e^{-0{,}138629 \cdot t}$ Halbwertszeit: 5 d Anfangsmenge: 10,1 g b2) 13,33 g b3) 16 d 14 h 38 min]

2. Vom Tetraeder ABCD weiß man, daß A und B den Normalabstand der windschiefen Geraden

g_1: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und g_2: $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ bilden.

Ferner sind die Punkte C(0/0/0) und D(5/5/0) gegeben.

Berechnen Sie A, B, die Länge AB und das Volumen des Tetraeders.

[**Lösungen:** A(1/-1/-3) B(2/3/5) AB = 9 $V = \frac{35}{6}$]

3. Der Kreis k: $x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$ hat mit der Parabel, deren Scheitel im Mittelpunkt des Kreises liegt, die Sehne auf der Geraden g: y = -1 gemeinsam.

a) Berechnen Sie die Mittelpunktskoordinaten und den Radius des Kreises und bestimmen Sie die Gleichung der Parabel.

b) Zeichnen Sie den Sachverhalt in ein kartesisches Koordinatensystem.

c) Ermitteln Sie die Tangentengleichungen an Kreis und Parabel in dem rechts von der y-Achse liegenden Schnittpunkt S_1. Berechnen Sie ferner den Schnittwinkel der beiden Kurven in S_1.

d) Kreis und Parabel rotieren um die y-Achse. Wie groß ist das Volumen des Körpers, der von dem Paraboloid aus der Kugel herausgeschnitten wird?

[**Lösungen:** a) M(0/2) r = 5 par: $x^2 = -\frac{16}{3} \cdot (y-2)$ c) S_1 (4/-1) t_k: $y = \frac{4}{3}x - \frac{19}{3}$ t_{par}: $y = -\frac{3}{2}x + 5$ $\alpha = 70{,}56°$ d) $V_y = \frac{124\pi}{3}$]

4. Ein Tal soll von A nach B überbrückt werden. Von einem Punkt C der Talsohle mißt man mit dem Theodoliten folgende Winkel bzw. Entfernungen: α = Höhenwinkel nach A = 9,717°, β = Höhenwinkel nach B = 14,867°, a = Entfernung von C nach A = 322,3 m, b = Entfernung von C nach B = 263,1 m. Der horizontale Schwenkungswinkel des Theodoliten beträgt γ = 47,467°.

a) Wie viele Meter befinden sich die Punkte A und B über dem Punkt C der Talsohle?

b) Wie lange wird die Brücke sein und wieviel Prozent Steigung wird sie haben? Fertigen Sie eine Skizze an!

[**Lösungen:** a) h_A = 54,40 m h_B = 67,51 m b) 237,8 m Steigung: 5,5%]

9300 St. Veit an der Glan, BG/BRG Dr.-Arthur-Lemisch-Straße 15
Mag. Walter Kaßmannhuber

1. Ein Landwirt hat die Möglichkeit, sein fünfeckiges Grundstück mit einem flächengleichen Grundstück zu tauschen, das die Form eines regelmäßigen Fünfecks besitzt. Wie lang ist die Seite des regelmäßigen Fünfecks, wenn vom erstgenannten Grundstück folgende Abmessungen bekannt sind: a = AB = 13,1 m, f = BD = 48,6 m, g = AD = 56,3 m, c = CD = 22,1 m, $\varepsilon = \angle DEA = 121{,}8°$, $\gamma = \angle BCD = 72{,}24°$, $\alpha_2 = \angle EAD = 32{,}27°$.

   [**Lösungen:** A = 1 243,057 m^2 s_5 = 26,879 m]

2. Gegeben ist die Funktion f: $y = 10 \cdot \frac{\ln x}{x^2}$.

   a) Diskutiere die Funktion (Definitionsmenge, Nullstellen, Extremstellen, Wendepunkte) und zeichne den Graphen von f für $x \in [0{,}7 ; 5]$.

   b) Berechne den Inhalt des Flächenstückes, das die Kurve mit der x-Achse und der Geraden x = e einschließt.

   c) Welchem Grenzwert strebt dieser Flächeninhalt für x = a und $a \to \infty$ zu?

   [**Lösungen:** a) D = R^+ N(1/0) H(1,65/1,84) W(2,3/1,57) b) A = 2,64 c) A $\to$ 10]

3. Gegeben sind die Funktionen f: $y = x^2$ und g: $y = 4{,}5 - x^2$.

   a) Berechne den von beiden Kurven begrenzten Flächeninhalt.

   b) Diese Fläche rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

   c) Zeige, daß ein in diesen Körper eingeschriebener Zylinder mit maximalem Volumen die Hälfte des Rotationskörpers einnimmt.

   [**Lösungen:** a) A = 9 b) $V_y = \frac{81\pi}{16}$ c) $r = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{4}$ $h = \frac{9}{4}$ $V_{min} = \frac{81\pi}{32} = \frac{V_y}{2}$]

4. Die Polizei führt Alkoholkontrollen durch, bei denen im Durchschnitt 15 von 100 Lenkern alkoholisiert sind.

   a) Wie viele Lenker müssen kontrolliert werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens ein alkoholisierter Lenker ertappt wird?

   b) An einem Abend werden 70 Lenker überprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß weniger als drei alkoholisiert sind?

   c) Im Monat sollen 2 400 Lenker kontrolliert werden. In welchem Bereich $[\mu-\varepsilon ; \mu+\varepsilon]$ liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die Anzahl der alkoholisierten Lenker?

   [**Lösungen:** a) 19 b) 0,405 c) [325 ; 395]]

9300 St. Veit an der Glan, BG/BRG Dr.-Arthur-Lemisch-Straße 15
Mag. Herwig Stocker

1. Die Leistung eines Elektrogerätes gehorcht einer Normalverteilung.
   a) Wie groß ist die mittlere Leistung μ und die zugehörige Streuung σ, wenn bekannt ist, daß 30,85% der Geräte eine Leistung von weniger als 485 W und 15,87% eine Leistung von mehr als 500 W besitzen?
   b) In welchem Intervall um den Mittelwert liegt die Leistung von 98% aller Geräte?
   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Gerät genau 479 W bzw. 515 W an Leistung hat?

   [**Lösungen:** a) $\mu = 490$ $\sigma = 10$ b) [466,7 ; 513,3] c) 13,57% 0,62%]

2. Ein allgemeines Viereck ABCD ist durch die Länge der 3 Seiten $a = AB = 634$ cm, $b = BC = 62$ dm, $d = DA = 1{,}53$ m und die beiden Winkel $\alpha = 87{,}3°$ und $\beta = 115°36'$ gegeben.
   a) Berechne die Länge der fehlenden Seite und die fehlenden Winkel.
   b) Bestimme die Fläche dieses Vierecks.
   c) Eine durch A gehende Gerade g soll das Viereck in zwei flächengleiche Teile teilen. Bestimme, ob diese Gerade g die Seite BC oder die Seite CD schneidet. Berechne, wie weit dieser Schnittpunkt S von C entfernt ist.

   [**Lösungen:** a) $c = 982{,}622$ $\gamma = 39{,}9°$ $\delta = 117{,}1°$ b) $A = 244\,149{,}471$ c) $S \in BC$ $SC = 192{,}987$]

3. Von einer Trafostation T, die an einer geraden Straße steht, soll ein Stromkabel zu einem Haus H verlegt werden. Die kürzeste Entfernung (der Normalabstand) des Hauses von der Straße beträgt 300 m, die Luftlinie Trafostation - Haus 500 m.
   a) Wie ist die Leitung zu verlegen, damit die Kosten, die längs der Straße 300 ATS/m und querfeldein 500 ATS/m betragen, minimal werden?
   b) Wie hoch ist die Kostenersparnis gegenüber einer Verlegung längs der Luftlinie?

   [**Lösungen:** a) TX = 175 m $K_{min} = 240\,000$,- b) 10 000,-]

4. Gegeben ist ein Dreieck ABC [A(-1/1), B(-1/15), C(11/6)]. Berechne
   a) die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U,
   b) die Koordinaten des Inkreismittelpunktes I,
   c) die Koordinaten des Schwerpunktes S
   d) sowie die Gleichungen des Umkreises, des Inkreises und der Eulerschen Geraden.
   e) Berechne die Winkel α, β und γ.

   [**Lösungen:** a) $U(\frac{25}{8}/8)$ b) I(3/7) c) $S(3/\frac{22}{3})$ d) $r_u = \frac{65}{8}$ $r_i = 4$ e: $X = \begin{pmatrix} \frac{25}{8} \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 16 \end{pmatrix}$ e) $\alpha = 67{,}38°$ $\beta = 53{,}13°$ $\gamma = 59{,}49°$]

5. Ermittle die Koeffizienten einer Polynomfunktion 3. Grades, deren Graph in $E_1\,(3/y_1)$ einen Extrempunkt und in $W(2/y_W)$ den Wendepunkt hat. Die Gleichung der Wendetangente lautet t_W: $6x + 2y - 8 = 0$.
   a) Bestimme die Extremwerte und zeichne den Graphen in [0;4] (Einheit: 2 cm).
   b) Berechne den Flächeninhalt des vom Graphen und von der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks.
   c) Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der bei der Drehung dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht.

   [**Lösungen:** a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ H(1/0) T(3/-4) b) $A = \frac{27}{4}$ c) $V_x = 65{,}435$]

9330 Treibach-Althofen, BORG „Auer von Welsbach“ Friesacher Straße 4
Mag. Gerhard Hagen

1. $f(x) = x^2 \cdot e^x$

   a) Diskutiere die Funktion (ohne Wendetangenten) und zeichne ihren Graphen im Intervall [-5 ; 1,5].

   b) Der Funktionsgraph schließt mit der x-Achse und der Senkrechten durch den Hochpunkt ein Flächenstück ein - berechne dessen Flächeninhalt.

   [**Lösungen:** a) a: y = 0 N = T(0/0) H(-2/0,54) W_1 (-3,41/0,38) W_2 (-0,59/0,19) b) A = 0,647]

2. Ein Beobachter befindet sich im Punkt P eines horizontal verlaufenden Tals. Von dort aus erblickt er zwei hintereinanderliegende Gipfel G_1 und G_2: der weiter entfernte Gipfel G_2, sichtbar unter dem Höhenwinkel $\omega_2 = 13{,}3°$, überragt G_1 um 6°. Der Beobachter muß nun 5 km auf die Gipfel zugehen, damit G_1 G_2 gerade deckt; jetzt sieht er beide Gipfel unter demselben Höhenwinkel $\alpha = 18{,}4°$.

   Berechne sowohl die direkte Entfernung von Gipfel zu Gipfel als auch den Höhenunterschied der beiden.

   [**Lösungen:** G_1G_2 = 9 640 m h = 3 043 m]

3a) Welcher Drehzylinder mit gegebener Oberfläche O hat das größte Volumen? Berechne seine Abmessungen zuerst allgemein und dann für O = 75,398 FE.

3b) Welche Abmessungen hat umgekehrt ein Drehzylinder mit minimaler Oberfläche bei gegebenem Rauminhalt V? Wie lauten die Werte allgemein und wie für V = 50,265 VE?

   [**Lösungen:** a) $r = \sqrt{\frac{O}{6\pi}} = 2$ $h = 2r = 2 \cdot \sqrt{\frac{O}{6\pi}} = 4$ b) $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2$ $h = 2r = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 4$]

4. Die Ellipse ell: $16x^2 + 25y^2 = 400$ und eine Parabel in 1. Hauptlage sind konfokal.

   a) Berechne durch implizites Differenzieren den Schnittwinkel der beiden Kurven.

   b) Wie lauten die Gleichungen der gemeinsamen Tangenten?

   c) Das kleinere der von den beiden Kurven eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x- und um die y-Achse. Berechne das Größenverhältnis der so entstandenen Drehkörper.

   [**Lösungen:** a) par: $y^2 = 12x$ $S(\frac{5}{4} / \sqrt{15})$ $\alpha = 49{,}471°$ b) t_1: $y = \frac{3}{5}x + 5$ t_2: $y = -\frac{3}{5}x - 5$ c) $V_x = 43{,}125\pi$ $V_y = 130{,}713\pi$ $V_x : V_y = 1 : 3{,}031$]

9330 Treibach-Althofen, BORG „Auer von Welsbach“ Friesacher Straße 4
Mag. Herbert Obmann

1. Von einer Bergspitze S herab sieht man zwei in einer horizontalen Ebene liegende, 1 850 Meter voneinander entfernte Orte A und B unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 46{,}5°$ und $\beta = 28{,}3°$. Die Strecke AB erscheint von S aus unter dem Sehwinkel $\varphi = 33{,}6°$.

   a) Wie hoch liegt die Spitze S über der Ebene?

   b) Wie weit sind die Orte A und B von der Bergspitze entfernt?

   c) Unter welchem Winkel erblickt man von S aus einen 105 m hohen Turm im Ort A?

   [**Lösungen:** a) 1 507,7 m b) AS = 2 078,53 m BS = 3 180,15 m c) 2,07°]

2. Die Parabel $y^2 = 8x$ schneidet eine konfokale Ellipse in 1. Hauptlage, die den Punkt $C(0/4\cdot\sqrt{2})$ enthält. Das kleinere, von beiden Kurven begrenzte Flächenstück rotiert um die x-Achse.

   a) Wie groß ist das Volumen des entstehenden Drehkörpers?

   b) Wie groß ist der Schnittwinkel der beiden Kegelschnitte?

   [**Lösungen:** ell: $8x^2 + 9y^2 = 288$ a) $S_{12}\ (3/\pm 2\cdot\sqrt{6})$ $V_x = 76\pi$ b) $\alpha = 67{,}792°$]

3. Das Rechteck ABCD mit A(0/1/5), $B(x_b/-3/2)$, $C(5/y_c/z_c)$ und $D(x_d/y_d/z_d)$ liegt in der Ebene ε: $2x - 5y + 6z + d = 0$.

   a) Berechnen Sie die vollständige Ebenengleichung und die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte.

   b) Errichten Sie über dem Rechteck als Basis eine Pyramide mit der Höhe $h = 3\cdot\sqrt{65}$, wobei die Spitze S auf der Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 25 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegen soll (verwenden Sie nur die ganzzahlige Lösung). Zeigen Sie, daß die Spitze S senkrecht über dem Eckpunkt D liegt.

   c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

   [**Lösungen:** a) ε: $2x - 5y + 6z - 25 = 0$ B(-1/-3/2) C(5/-3/0) D(6/1/3) b) S(12/-14/21) c) V = 260]

4. $f(x) = -(\frac{x}{2} + 3)\cdot e^{-\frac{x}{6}}$

   Diskutieren Sie diese Funktion: besondere Kurvenpunkte, Wendetangente, Graph.

   [**Lösungen:** N(-6/0) T(0/-3) $W(6/-\frac{6}{e})$ t_W: x - 2ey = 18]

9330 Treibach-Althofen, BORG „Auer von Welsbach“ Friesacher Straße 4
Mag. Herbert Obmann

1. Von einer Bergspitze S herab sieht man zwei in einer horizontalen Ebene liegende, 1 850 Meter voneinander entfernte Orte A und B unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 46{,}5°$ und $\beta = 28{,}3°$. Die Strecke AB erscheint von S aus unter dem Sehwinkel $\varphi = 33{,}6°$.
   a) Wie hoch liegt die Spitze S über der Ebene?
   b) Wie weit sind die Orte A und B von der Bergspitze entfernt?
   c) Unter welchem Winkel erblickt man von S aus einen 105 m hohen Turm im Ort A?

   [**Lösungen:** a) 1 507,7 m b) AS = 2 078,53 m BS = 3 180,15 m c) 2,07°]

2. Die Parabel $y^2 = 8x$ schneidet eine konfokale Ellipse in 1. Hauptlage, die den Punkt $C(0/4\cdot\sqrt{2})$ enthält. Das kleinere, von beiden Kurven begrenzte Flächenstück rotiert um die x-Achse.
   a) Wie groß ist das Volumen des entstehenden Drehkörpers?
   b) Wie groß ist der Schnittwinkel der beiden Kegelschnitte?

   [**Lösungen:** ell: $8x^2 + 9y^2 = 288$ a) $S_{12}\,(3/\pm2\cdot\sqrt{6})$ $V_x = 76\pi$ b) $\alpha = 67{,}792°$]

3. Das Rechteck ABCD mit A(0/1/5), $B(x_b/-3/2)$, $C(5/y_c/z_c)$ und $D(x_d/y_d/z_d)$ liegt in der Ebene ε: $2x - 5y + 6z + d = 0$.
   a) Berechnen Sie die vollständige Ebenengleichung und die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte.
   b) Errichten Sie über dem Rechteck als Basis eine Pyramide mit der Höhe $h = 3\cdot\sqrt{65}$, wobei die Spitze S auf der Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 6 \\ -24 \\ 25 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegen soll (verwenden Sie nur die ganzzahlige Lösung). Zeigen Sie, daß die Spitze S senkrecht über dem Eckpunkt D liegt.
   c) Berechnen Sie das Volumen der Pyramide.

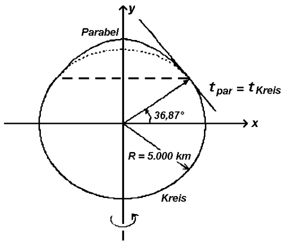
   [**Lösungen:** a) ε: $2x - 5y + 6z - 25 = 0$ B(-1/-3/2) C(5/-3/0) D(6/1/3) b) S(12/-14/21) c) V = 260]

4. k: $y^2 = x^3$, g: $x = 8$.
   Die Neilsche Parabel k, die Gerade g und die Abszissenachse schließen eine Fläche ein, die ganz im 1. Quadranten liegt.
   a) Berechnen Sie Umfang und Inhalt dieser Fläche. Wie groß ist das Volumen jenes Drehkörpers, der entsteht, wenn diese Fläche um die x-Achse rotiert?
   b) Dieser Fläche ist das inhaltsgrößte Rechteck mit den Seiten parallel zu den Koordinatenachsen einzuschreiben. Wieviel Prozent der ursprünglichen Fläche beträgt diese Rechtecksfläche?

   [**Lösungen:** a) U = 54,870 $A = \dfrac{256\cdot\sqrt{2}}{5}$ $V_x = 1024\pi$ b) $A_{max} = \dfrac{768\cdot\sqrt{30}}{125}$ 46,475%]

9330 Treibach-Althofen, BORG „Auer von Welsbach“ Friesacher Straße 4
Mag. Wolfgang Rauchenwald

1. Auf einem kugelförmigen Planeten vom Radius 5 000 km hat sich im Laufe eines Winters über dem Nordpol eine parabolische Eiskappe gebildet, die in 36,87° nördlicher Breite den Planeten tangential berührt. *(Koordinaten des Berührungspunktes auf ganze 1 000 km runden!)*



   a) Welches Eisvolumen ergibt sich dabei?
   b) Wie groß ist die maximale Eisdicke?
   c) Wie weit müßte man sich entlang der Drehachse vom Pol entfernen, um gerade die ganze Eiskappenoberfläche zu überblicken?

   [**Lösungen:** k: $x^2 + y^2 = 5000^2$ par: $y = -\frac{1}{6000}x^2 + \frac{17000}{3}$ a) $4\cdot10^9$ km³ b) 666,6 km c) 2 666,6 km]

2. Aus einer Augenhöhe von 3,5 m über einem Badeteich sieht man einen Schmetterling unter dem Höhenwinkel α und dessen Spiegelbild im Teich unter dem Tiefenwinkel 2α. Der Normalabstand der Augen von der Verbindungsstrecke ‘Schmetterling und dessen Spiegelbild’ beträgt 3 m.

   Wie hoch flattert der Schmetterling über dem Teich?

   [**Lösungen:** 5,67 m]

3. Zwei Masseteilchen üben aufeinander eine Kraft F in Abhängigkeit ihres Abstandes r aus, die durch folgende Funktion beschrieben ist:

$$F(r) = \frac{4r-2}{r^3} \quad \text{mit } F \geq 0 \text{ ... anziehend, } F \leq 0 \text{ ... abstoßend}$$

   a) Bei welchem Abstand (in LE) sind die Teilchen stabil?
   b) Bei welchem Abstand gibt es die größte (anziehende) Kraft?
   c) Welche Energie (in EE) ist notwendig, um die beiden Teilchen aus dem stabilen Zustand völlig zu trennen?
   Bemerkung: $E = \int F(r)\,dr$
   d) Der Graph der Kraftfunktion ist zu zeichnen, wobei die nötigen Kurvendiskussionsschritte durchzuführen sind.
   e) Um welche Art von Funktion handelt es sich bei dieser Kraftfunktion (genaue Beschreibung)?

   [**Lösungen:** a) $r = \frac{1}{2}$ b) $r = \frac{3}{4}$ c) E = 4 d) a: y = 0 N($\frac{1}{2}$/0) H($\frac{3}{4}$/$\frac{64}{27}$) W(1/2) e) echt gebrochen rationale Funktion]

4. Ein Wald soll ausgeschlägert werden, und zwar sollen Bäume ab einem Stammdurchmesser von 35 cm gefällt werden. Um die ungefähre Anzahl der zu fällenden Bäume zu bestimmen, wird eine Stichprobe von 20 Bäumen, deren Stammdurchmesser gemessen wird, ausgewählt. Durchmesser in cm: 11, 17, 31, 48, 45, 40, 47, 57, 12, 9, 33, 42, 18, 9, 68, 73, 60, 61, 23, 16. Es wird angenommen, daß die Durchmesser der Baumstämme annähernd normalverteilt sind, wobei Mittelwert und Standardabweichung mit den Werten der Stichprobe übereinstimmen sollen.

   a) Wieviel Prozent des Waldbestandes können geschlägert werden?
   b) Wieviel Prozent dieses Waldes machen die Stämme mit einem Durchmesser zwischen 29 cm und 37,5 cm aus?
   c) Ab welchem Durchmesser gehört ein Stamm zu den stärksten 30%?
   d) Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion ist mit Hilfe einer Wertetabelle zu zeichnen.

   [**Lösungen:** $\mu = 36$ $\sigma = 20{,}47$ a) 51,9% b) 16,09% c) 46,64 cm]

9400 Wolfsberg, BORG Gartenstraße 1
Mag. Irene Angermann

1. $f(x) = \dfrac{ax^2 - 7x + 10}{x + b}$ hat die Asymptoten g_1: x = 6 und g_2: y = x - 1.

   Ermittle die Funktionsgleichung sowie Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkt und zeichne den Graphen. Berechne das von f, g_2 und den Ordinaten x = 7 und x = 10 begrenzte Flächenstück.

   [**Lösungen:** $f(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 6}$ N_1 (2/0) N_2 (5/0) H(4/1) T(8/9) kein Wendepunkt A = 5,545]

2. Von einer Hyperbel kennt man den Punkt P(3/4) und die Asymptoten u, v: y = ±2x.

   a) Stelle die Hyperbelgleichung auf.
   b) Zeige: die Fußpunkte der Normalen, die von den Brennpunkten auf die Tangente in P gezogen werden, liegen auf dem Kreis k [M = O(0/0); r = a].
   c) Zeige: die Tangente in P halbiert den Winkel zwischen den Leitstrahlen von P.
   d) Zeige: die zur Asymptote u parallele Gerade durch P schneidet die Hyperbel nur in P.

   [**Lösungen:** a) $\dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{20} = 1$ b) F_{12} (±5/0) t_P: y = 3x - 5 F_1' (1/-2) F_2' (2/1) d) $\overline{u}$: y = 2x - 2]

3. Die Gerade g: x = 18 schneidet von der Parabel par: $y^2 = 8x$ ein Segment ab. In dieses Segment wird das flächengrößte Trapez eingeschrieben, dessen Basis die auf g liegende Sehne ist.

   Berechne A_{max}, weise das Extremum nach und vergleiche die Fläche des Trapezes mit der des Parabelsegments.

   [**Lösungen:** x = 2 y = 4 A_{max} = 256 A_{par} = 288 $A_{par} : A_{max}$ = 9 : 8]

4a) Wie lautet die quadratische Gleichung, für die $z_1 = \dfrac{(i+1)^4}{i^{40} - i^7}$ eine Lösung ist?

4b) $z_1 = -1 + i$, $z_2 = 4(1 - \sqrt{3}\,i)$. Berechne kartesisch und in Polarform das Produkt $z_1 \cdot z_2$ und zeige das Übereinstimmen der Resultate.

4c) Löse die Kreisteilungsgleichung $x^5 + 1 = 0$ und stelle die Lösungen grafisch dar.

[**Lösungen:** a) $z_1 = -2 + 2i$ $z^2 + 4z + 8 = 0$ b) $z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot [\,(\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1) \cdot i\,] = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos \frac{5\pi}{12} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{12})$
c) { -1, -0,309 ± 0,951i, 0,809 ± 0,588i }]

9400 Wolfsberg, BORG Gartenstraße 1
Mag. Klaus Obmann

1. Die Funktion $y = \sin^2 x + a \cdot \sin x + b$ besitzt den Wendepunkt $W(\frac{5\pi}{6}/\frac{9}{4})$.

   Ermitteln Sie die Funktionsgleichung. Diskutieren Sie die Funktion im Intervall $[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$: Nullstellen, Ableitungen, Extremstellen (ohne Beweis), Wendepunkte, Graph.

   [**Lösungen:** $y = \sin^2 x + 2 \cdot \sin x + 1$ $N = T(-\frac{\pi}{2}+2\pi k/0)$ $H(\frac{\pi}{2}+2\pi k/4)$ $W_1(\frac{\pi}{6}+2\pi k/\frac{9}{4})$ $W_2(\frac{5\pi}{6}+2\pi k/\frac{9}{4})$]

2. Gegeben sind die Parabel par: $y^2 = 8x$ und der Punkt P(-12/2).
   Legt man durch den Brennpunkt F der Parabel einen Kreis k mit dem Mittelpunkt $M_k = P$ und schneidet diesen mit der Leitlinie l, so erhält man die Schnittpunkte S_{12}.

   Beweisen Sie: Die Tangenten, die man von P aus an die Parabel legen kann, sind gleichzeitig Streckensymmetralen von FS_1 bzw. FS_2.

   [**Lösungen:** F(2/0) k: $(x+12)^2 + (y-2)^2 = 200$ S_1 (-2/12) S_2 (-2/-8) T_1 (18/12) t_1: x - 3y = -18 T_2 (8/-8) t_2: x + 2y = -8]

3. Einer Kugel vom Radius r soll ein Drehkegel mit minimalem Volumen umschrieben werden. Berechnen Sie allgemein seine Maße und die Größe des Volumens.

   [**Lösungen:** $R = \sqrt{2} \cdot r$ $h = 4r$ $V_{min} = \frac{8\pi}{3} r^3$]

4. Die Hyperbel $9x^2 - 2y^2 = 18$ wird im Punkt P(2/y>0) von einer Ellipse mit denselben Brennpunkten geschnitten.

   a) Berechne Sie die Ellipsengleichung.
   b) Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Kegelschnitte im Punkt P im 1. Quadranten.
   c) Berechnen Sie das Volumen V des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die von der Ellipse und Hyperbel umschlossene (im ersten und vierten Quadranten gelegene) Fläche um die x-Achse rotiert.

   [**Lösungen:** a) $\frac{x^2}{22} + \frac{y^2}{11} = 1$ b) 90° c) $V_x = 16{,}215\pi$]

9400 Wolfsberg, BORG Gartenstraße 1
Mag. Klaus Obmann

1. Der Graph der Funktion f: $R \to R$, $x \to ax^3 + bx^2 + cx + d$ verläuft durch den Punkt O(0/0) und besitzt im Wendepunkt W(4/4) die Wendetangente t_W: y = -3x + 16.

   Ermitteln Sie den Funktionsterm und diskutieren Sie die Funktion im Intervall [-1;8] (Definitionsmenge, Asymptoten, Symmetrie, Nullstellen, Extremstellen, Graph). Berechnen Sie weiters den Inhalt der Fläche, den die Kurve mit der x-Achse einschließt.

   [**Lösungen:** $y = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x$ N_1 (0/0) N_2 = T(6/0) H(2/8) W(4/4) $A_x = 27$]

2. Der Kugel vom Radius r ist eine quadratische Pyramide von größtem Rauminhalt einzuschreiben. Wie sind deren Abmessungen zu wählen? Berechnen Sie zuerst allgemein und dann speziell für den Radius r = 3 cm.

   [**Lösungen:** $a = h = \frac{4r}{3}$ $V_{max} = \frac{64}{81}r^3$]

3. Auf einer geraden, unter $\varepsilon = 12°36'$ ansteigenden Straße erblickt ein Autofahrer gerade vor sich eine Bergspitze unter dem Höhenwinkel $\alpha = 29°24'$. Nach einer Fahrt von 850 m ist dieser Winkel auf $\beta = 35°54'$ angewachsen.

   Wie lange sind die beiden Sichtlinien zur Bergspitze und wie hoch ist der Berg, wenn sich der Autofahrer bei seiner ersten Höhenwinkelmessung in einer Seehöhe von 1 680 m befunden hat? Fertigen Sie eine genaue Zeichnung an.

   [**Lösungen:** $s_1 \approx 2\,970$ m $s_2 \approx 2\,170$ m $h \approx 3\,138$ m]

4. Ermitteln Sie die Schnittpunkte und den Schnittwinkel der beiden Kurven k_1: $3x^2 + 4y^2 = 12$ und k_2: $y^2 = \frac{9}{4}x$.

   Berechnen Sie weiters das Volumen des Drehkörpers, der entsteht, wenn das gemeinsam eingeschlossene Flächenstück um die x-Achse rotiert. Fertigen Sie eine genaue Skizze an.

   [**Lösungen:** $S_{12}\ (1/\pm\frac{3}{2})$ t_{ell}: x + 2y = 4 t_{par}: 3x - 4y = -3 $\alpha = 116{,}565°$ $V_x = \frac{19\pi}{8}$]

9400 Wolfsberg, BORG Gartenstraße 1
Mag. Andrea Schratter

1. Der Ellipse [P(-6/4), Q(8/3)] ist ein Rechteck so einzuschreiben, daß bei Rotation um die x-Achse der Drehzylinder mit dem größten Volumen entsteht. Wieviel Prozent des Ellipsoidvolumens nimmt dieser ein?

   [**Lösungen:** $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ $V_{ell} = \frac{1000\pi}{3}$ $x = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{3}$ $y = \frac{5 \cdot \sqrt{6}}{3}$ $V_{max} = 192{,}45\pi$ 57,735%]

2. Die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{cx + 2}$ hat die Polstelle x = -2 und den Extrempunkt E(-3/-2).

   Ermittle die Funktion und führe eine Kurvendiskussion durch (Definitionsmenge, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Wendetangente, Asymptoten, Graph).

   [**Lösungen:** $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2}$ a_1: x = -2 a_2: y = x + 2 keine Nullstelle H(-3/-2) T(-1/2) kein Wendepunkt]

3. Der Kreis mit dem Mittelpunkt M(-9/4) berührt die Gerade t: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

   a) Berechne die Länge der kürzesten Sehne, die man durch P(-1/12) legen kann.

   b) Berechne den Winkel α, den die in den Sehnenendpunkten gelegten Tangenten einschließen.

   c) Zeige, daß der Kreismittelpunkt auf der Winkelhalbierenden von α liegt.

   [**Lösungen:** k: $(x+9)^2 + (y-4)^2 = 160$ a) S_1 (-5/16) S_2 (3/8) $s = 8 \cdot \sqrt{2}$ b) $\alpha = 126{,}87°$ c) w_α: y = x + 13]

4. Die Kurve k_1: $(x + 3)^2 + y^2 = 100$ wird in P(x>0/6) von der Kurve k_2: $y^2 = ax + b$ rechtwinkelig geschnitten.

   Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung der von beiden Kurven eingeschlossenen Fläche um die x-Achse entsteht.

   [**Lösungen:** k_2: $y^2 = 9x - 9$ $V_x = \frac{328\pi}{3}$]

9470 St. Paul, Stiftsgymnasium Lobisserplatz 7
Mag. Margit Fuchs

1. Im Festsaal einer Schule soll die Decke durch 100 gleiche Dekorationselemente aus Kunststoff neu gestaltet werden. Ein Element hat folgende Form: Es besteht aus einem 3 dm hohen Oberteil und einem 2 dm hohen Unterteil. Das Oberteil ist ein Teil eines Rotationsparaboloides (par: $x^2 = 2p \cdot (y-n)$, Drehung um y-Achse) mit Kreisradius $r_1 = 3$ dm (Kreis k_1 liegt an der Decke) und Kreisradius $r_2 = 6$ dm (Kreis k_2 grenzt an das Unterteil). Das Unterteil ist Teil eines Rotationshyperboloides (hyp: $-a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$, Drehung um y-Achse), von dem ein Brennpunkt der Mittelpunkt des Kreises k_2 ist.

   Berechne, wieviel Material benötigt wird, wenn die einzelnen Teile voll ausgeschäumt werden sollen.

   [**Lösungen:** par: $x^2 = -9 \cdot (y-8)$ hyp: $-x^2+3y^2 = 12$ $V = 9{,}95\pi$ dm^3]

2. Ein rotationssymmetrisches Werkstück hat die Form eines Zylinders mit auf der einen Seite aufgesetzter Halbkugel und auf der anderen Seite aufgesetztem Drehkegel. Die Radien von Zylinder, Halbkugel und Drehkegel sind gleich. Die Höhe des Kegels verhält sich zu seinem Radius wie 15 : 8. Das Volumen V beträgt 333π cm^3.

   Wie ist das Werkstück zu dimensionieren, damit die Oberfläche minimal wird?

   [**Lösungen:** $r = 6$ cm $h_Z = 1{,}5$ cm $h_K = 11{,}25$ cm $O_{min} = 166{,}5\pi$ cm^2]

3. Bei einer „Gaußschen Verteilungskurve" ist y' = -xy.

   a) Lösen Sie diese Differentialgleichung und bestimmen Sie die Gleichung der Verteilungskurve durch P(0/1).

   b) Untersuchen Sie diese Kurve auf Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und Asymptoten und zeichnen Sie den Graphen im Intervall [-6;6].

   c) Berechnen Sie mit der Formel von Simpson die Fläche zwischen Kurve und x-Achse näherungsweise in den Grenzen von 0 bis 8 (n = 4);

   zeigen Sie, daß diese Fläche angenähert den Wert $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ hat. Wie groß ist der Fehler?

   [**Lösungen:** a) $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ b) a: y = 0 keine Nullstelle H(0/1) W_{12} $(\pm 1/\frac{1}{\sqrt{e}})$ c) A = 1,247 305 Fehler: 0,006]

4. Eine Firma füllt zwei Waschmittelprodukte in Pakete ab. Die Masse der Produkte ist normalverteilt. Für das Produkt „Persol" erhält man einen Mittelwert von 3 100 g mit einer Standardabweichung von 100 g und für das Produkt „Gelber Riese" einen Mittelwert von 3 300 g und eine Standardabweichung von 250 g. Auf beiden Sorten ist auf der Verpackung ein Füllgewicht von 3 000 g angegeben. Pakete, die ein geringeres Füllgewicht haben, sind untergewichtig.

   a) Bei welchem dieser beiden Produkte ist die Wahrscheinlichkeit, ein untergewichtig abgefülltes Paket zu erhalten, größer?

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das Füllgewicht des Mittels „Persol" zwischen 2 950 g und 3 150 g?

   c) Wieviel Prozent der Pakete des Mittels „Gelber Riese" liegen über 3 400 g?

   d) Waschmittelprodukte der Marke „Persol" mit einem Füllgewicht unter h Gramm gelten als Ausschuß. Wie groß ist h, wenn der Ausschußanteil 5% betragen darf?

   e) Beim Transport werden etwa 3% der Pakete beschädigt. Ein Supermarkt erhält 10 000 Pakete. Berechne, in welchem Bereich mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der unbeschädigten Pakete liegt.

   [**Lösungen:** a) Persol: 0,159 Gelber Riese: 0,115 b) 0,625 c) 34,46% d) 2 935,5 e) [9 672 ; 9 728]]

9470 St. Paul, Stiftsgymnasium Lobisserplatz 7
Mag. Manfred Katzenberger

1. Beim horizontalen Wurf befindet sich der Massenmittelpunkt des geworfenen Körpers zum Zeitpunkt t im Punkt P(x/y), wobei $x = v\cdot t$ und $y = -0{,}5\cdot g\cdot t^2$ ($g \approx 9{,}81\ m/s^2$).
   a) Zeige, daß die Flugkurve eine Parabel ist und gib die Koordinaten des Brennpunktes in Abhängigkeit von g und v an.
   b) Ein Löschflugzeug fliegt in 500 m Höhe mit v = 180 km/h. Wieviel Meter vor dem brennenden Wald muß der Wasserbehälter abgeworfen werden (Reibung bleibt unberücksichtigt)? Wie lange fliegt der Behälter frei in der Luft?
   c) Leite für den schiefen Wurf (Abwurfwinkel φ, Anfangsgeschwindigkeit v) eine analoge Gleichung her und bestimme allgemein die Wurfweite.
   d) Unter welchem Winkel ist die Wurfweite maximal?

   [**Lösungen:** a) $y = -\frac{g}{2v^2}\cdot x^2$ $F(0/-\frac{v^2}{g})$ b) 504,8 m 10,1 s c) $y = \tan\varphi\cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\varphi}\cdot x^2$ $w = \frac{v_0^2\sin^2\varphi}{g}$ d) 45°]

2. Berechne die Gleichung jener Kugel, die durch die Punkte A(11/-8/16) und B(19/-4/-8) geht und deren Mittelpunkt auf der Geraden g durch I(9/-6/12) und II(12/-8/16) liegt. Berechne weiters die Schnittpunkte der Geraden h: $X = \begin{pmatrix}11\\2\\17\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ mit der Kugel und die Gleichungen der Tangentialebenen in den Schnittpunkten. Gib auch die Schnittgerade der Tangentialebenen in Parameterform an.

   [**Lösungen:** $x^2 + y^2 + z^2 = 441$ S_1 (13/4/16) S_2 (5/-4/20) τ_1: 13x + 4y + 16z = 441 τ_2: 5x - 4y + 20z = 441

   s: $X = \begin{pmatrix}49\\-49\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-4\\5\\2\end{pmatrix}$]

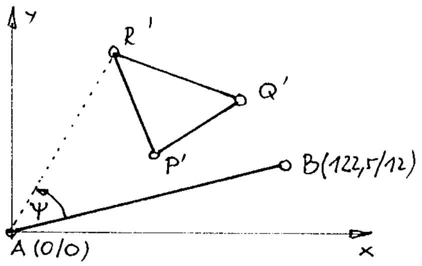
3. Diskutiere die Funktion f: $y = 2\cdot\cos x + \sin 2x$ im Intervall $[0;\frac{3\pi}{2}]$ und zeichne den Graphen. Berechne den Inhalt des von den positiven Koordinatenachsen und dem Graphen begrenzten Flächenstücks.

   [**Lösungen:** a) $N_1 = W_1\ (\frac{\pi}{2}/0)$ $N_2 = W_3\ (\frac{3\pi}{2}/0)$ $H(\frac{\pi}{6}/\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2})$ $T(\frac{5\pi}{6}/-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2})$ W_2 (3,39/-1,45) A = 3]

4. Eine Bauparzelle PQR in nicht horizontalem Gelände soll im Ortskoordinatensystem (O,x',y') vermessen werden. Mittels Theodolit wurden folgende Winkel und Entfernungen gemessen und in die untenstehende Tabelle eingetragen.

   r ... schiefe Entfernung von A
   ψ ... horizontaler Winkel von der Standlinie AB aus
   δ ... Zenitdistanz

Punkte	ψ	φ	δ	η	r	r'	x'	y'
P	6,2°		77,5°		99,5			
Q	29,7°		75,2°		132,3			
R	52,3°		73,4°		148,5			



Berechne die Ortskoordinaten der Grundrisse P'Q'R' von PQR sowie die Fläche des Dreiecks P'Q'R'.

[**Lösungen:** P' (95/19,9) Q' (104,4/73,9) R' (75,6/120,5) A = 996,6 m^2]

9470 St. Paul, Stiftsgymnasium Lobisserplatz 7
Mag. Herta Schneider

1. Eine Vase hat die Gestalt eines Rotationskörpers, der durch Drehung eines Flächenstücks um die x-Achse entstanden ist. Das Flächenstück wird vom Graphen der Funktion $y = \sin 2x + 2\cdot\cos x$, von den Geraden g_1: $x = -\frac{\pi}{6}$ und g_2: $x = \frac{\pi}{3}$ und der x-Achse begrenzt.

   a) Untersuche die Funktion im Intervall $[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}]$ auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte und zeichne den Graphen.

   b) Berechne das Volumen dieser Vase und vergleiche es mit dem Volumen einer zylinderförmigen Vase mit dem kleineren Kreis als Grundfläche und derselben Höhe wie die ursprüngliche Vase.

   [**Lösungen:** a) $N_1 = W_1\ (-\frac{\pi}{2}/0)$ $N_2 = W_3\ (\frac{\pi}{2}/0)$ $N_3 = W_5\ (\frac{3\pi}{2}/0)$ $H(\frac{\pi}{6}/\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2})$ $T(\frac{5\pi}{6}/-\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2})$ W_2 (-0,25/1,45) W_4 (3,39/-1,45) b) $V_x = 7{,}058\pi$ $V_{Zylinder} = \frac{3}{8}\pi^2$ $V_x : V_{Zylinder} \approx 6 : 1$]

2a) Leite die Bedingung dafür her, daß eine Gerade g: $y = kx + d$ eine Ellipse in 1. Hauptlage in einem Punkt berührt.

2b) Eine Ellipse in 1. Hauptlage mit $e = \sqrt{5}$ berührt die Gerade g: $\sqrt{2}\,x + 6y = 9\cdot\sqrt{2}$. Ermittle die Ellipsengleichung und die Koordinaten des Berührpunktes T.

2c) Eine Hyperbel in 1. Hauptlage hat die gleiche Nebenachsenlänge wie obige Ellipse. Wie muß die Hauptachsenlänge der Hyperbel gewählt werden, damit der Inhalt des durch die 4 Schnittpunkte der beiden Kurven bestimmten Rechtecks möglichst groß wird?

[**Lösungen:** a) $d^2 = a^2k^2 + b^2$ b) ell: $4x^2 + 9y^2 = 36$ $T(1/\frac{4\cdot\sqrt{2}}{3})$ c) hyp: $4x^2 - 3y^2 = 12$ $A_{max} = 12$]

3a) Ermittle die Lösungen z_1 und z_2 der Gleichung $z^2 - (3+7i)\cdot z - (28+3i) = 0$ in $\mathbb{C}$.
Wie lautet eine quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten, deren Lösungsmenge $L' = \{z_1 + z_2\ ,\ z_1\cdot z_2\}$ ist? Zeige: $(z_1 : z_2)^* = z_1^* : z_2^*$.

3b) Fasse die beiden den Lösungen z_1 und z_2 zugeordneten Punkte P und Q als Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem auf. Sie liegen auf einem Kreis k, dessen Mittelpunkt M auf der Geraden g: $X = \begin{pmatrix}8\\3\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$ liegt. Bestimme die Gleichung des Kreises sowie die Gleichungen der Tangenten in P und Q. Zeige, daß sich die beiden Tangenten rechtwinkelig schneiden. Dieser Kreis ist Inkreis eines Quadrates, dessen Eckpunkt A der Schnittpunkt der beiden Tangenten ist. Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte B, C und D? Wieviel % von der Quadratfläche nimmt die Kreisfläche ein?

[**Lösungen:** a) {6+5i , -3+2i} $z^2 + (25-4i)\cdot z - (63+205i) = 0$ $(z_1 : z_2)^* = z_1^* : z_2^* = -\frac{8}{13} + \frac{2}{13}i$ b) k: $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 45$ t_P: $x + 2y = 16$ t_Q: $-2x + y = 8$ A(0/8) B(-6/-4) C(6/-10) D(12/2) 78,54%]

4. 100 Mädchen und 200 Knaben eines Jahrganges nehmen an einem Bezirkssportfest teil. Die Ergebnisse des Weitsprungs sind annähernd normalverteilt mit folgenden Parametern:

Knaben: $\mu_K = 4{,}7$ m, $\sigma_K = 0{,}9$ m
Mädchen: $\mu_M = 4{,}1$ m, $\sigma_M = 1{,}0$ m

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Knabe zwischen 4,4 m und 5,2 m springt? Berechne diese Wahrscheinlichkeit als Fläche unter der Dichtefunktion und löse das Integral mit Simpson für n = 4.

b) Wie viele Knaben und wie viele Mädchen haben eine Weite von 5,0 m übersprungen? Zählt ein Mädchen, das 3,0 m weit gesprungen ist, zu den schlechtesten 10% der Mädchen?

c) Wie groß müßte σ_M sein, damit mindestens 78,5% der Mädchen eine Sprungweite aufweisen, die nicht mehr als 0,8 m von μ_M abweicht?

d) Die 10 besten Knaben und die 5 besten Mädchen fahren zum Landeswettbewerb. Welche Weite ist dazu bei den Knaben und welche bei den Mädchen erforderlich?

e) Aus allen 300 Teilnehmern werden ein Mädchen und ein Knabe zufällig ausgewählt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das Mädchen weiter gesprungen als der Knabe?

[**Lösungen:** a) 0,341 b) Knaben: 74 Mädchen: 18 nein: $P(X<3{,}0) = 0{,}136$ c) 0,645 m
d) Knaben: 6,18 m Mädchen: 5,75 m e) 0,328]

9500 Villach, BG/BRG Peraustraße 10
Mag. Josef Resei

1. Gegeben ist die Exponentialfunktion f: $y = (x^2 - 3) \cdot e^x$.

   a) Diskutiere und zeichne diese Funktion im Intervall [-5;2]

   b) Berechne die Fläche, die diese Kurve innerhalb der beiden Nullstellen mit der x-Achse einschließt.

   [**Lösungen:** a) N_{12} ($\pm\sqrt{3}$/0) H(-3/0,30) T(1/-5,44) W_1 (-4,24/0,22) t_1: y = 0,09x + 0,61 W_2 (0,24/-3,73) t_2: y = -3,13x - 2,99 b) 9,24]

2. Gegeben ist die Ellipse $9x^2 + 25y^2 = 225$.

   a) Diese Ellipse dreht sich um die x-Achse. Dem so entstehenden Drehellipsoid ist der volumsgrößte Drehkegel so einzuschreiben, daß seine Spitze in einem Hauptscheitel der Ellipse liegt. Berechne Volumen und Abmessungen dieses Kegels.

   b) Berechne das Volumen des Drehellipsoides, das durch Ausbohrung des Drehkegels aus dem Ellipsoid entsteht.

   [**Lösungen:** a) $r = \sqrt{8}$ $h = \frac{20}{3}$ $V_{max} = \frac{160\pi}{9}$ b) $V = \frac{80\pi}{3}$]

3. Gegeben ist das Dreieck ABC [A(-7/0), B(3/-10), C(9/8)].

   Für jedes Dreieck gilt: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt H eines Dreiecks an den Dreiecksseiten, so liegen diese drei gespiegelten Punkte auf dem Umkreis des Dreiecks.

   Zeige im gegebenen Dreieck die Gültigkeit dieses Satzes nur für den Punkt H_c (= Spiegelpunkt des Höhenschnittpunktes H an der Seite c).

   [**Lösungen:** H(-1/-2) H_c (-5/-6) $\in k_u$: $(x-3)^2 + y^2 = 100$]

4. Eine Ölgesellschaft hat zwei Raffinerien A und B, in denen schweres, mittelschweres und leichtes Öl hergestellt werden. Die täglichen Produktionsmengen von schwerem Öl betragen 400 t in der Raffinerie A und 1 000 t in der Raffinerie B, von mittelschwerem Öl 100 t in A und 100 t in B, von leichtem Öl 200 t in A und 100 t in B. Die Kosten je Tag belaufen sich in A auf 40 000 Schilling und in B auf 30 000 Schilling. Der Mindestbedarf im Vierteljahr ist 64 000 t schweres Öl, 12 000 t mittelschweres und 16 000 t leichtes Öl.

   Wie viele Tage muß in beiden Raffinerien gearbeitet werden, damit die Gesamtkosten minimal werden?

   [**Lösungen:** [40 80] K_{min} = 4 000 000,-]

9500 Villach, BG/BRG Peraustraße 10
Mag. Franz Stürzer

1. Gegeben ist die Funktion $y = (4-x^2)\cdot e^{-x}$.

   a) Berechne die beiden Nullstellen N_1 und N_2.

   b) Wertetabelle und Zeichnung im Bereich von N_1 und N_2.

   c) Berechne mittels Integralrechnung den Inhalt jenes Flächenstückes im 1. Quadranten, das von der x-Achse, der y-Achse und der Kurve bis zur rechten Nullstelle begrenzt wird (Genauigkeit: 3 Dezimalen).

   d) Zur Probe soll die Aufgabe (c) auch näherungsweise mit 4 Rechteckstreifen berechnet werden. Zeige, daß der Fehler kleiner als 3% ist.

   [**Lösungen:** a) N_{12} $(\pm 2/0)$ c) A = 2,812 d) $\frac{S_u + S_o}{2}$ = 2,884 Fehler: 2,56%]

2a) Gegeben ist die Folge $a_n = \frac{3n+2}{1+4n}$.

   a1) Berechne die ersten drei Glieder dieser Folge und prüfe, ob sie eine geometrische Folge bilden können.

   a2) Beweise allgemein mittels Ungleichung, daß diese Folge monoton fallend ist.

   a3) Untersuche allgemein mittels Ungleichung, ob $\frac{4}{5}$ eine untere Schranke dieser Folge ist.

   a4) Berechne den lim dieser Folge.

2b) Zeige mit Hilfe des lim, daß die Folge $a_n = \frac{2n^3+2}{5n+4n^2}$ divergent ist.

2c) Nach wieviel Jahren ist ein Kapital von 100 000 S bei 2,75% Verzinsung auf das Doppelte angewachsen?

   [**Lösungen:** a1) $< 1, \frac{8}{9}, \frac{11}{13}, \ldots >$ keine geometrische Folge c) Verdoppelungszeit: 26 Jahre]

3. Gerade g: $y = \frac{3x-11}{4}$, Kreis k: $M(6/-\frac{18}{4})$, $r = \sqrt{\frac{325}{4}}$.

   a) Berechne die Schnittpunkte B und C der Geraden g mit dem Kreis k.

   b) B und C bilden zusammen mit dem Punkt A(-3/9) das Dreieck ABC. Berechne die Gleichung des Inkreises dieses Dreiecks.

   c) Fertige eine exakte Zeichnung an, aus der alle Lösungen der oben gestellten Fragen konstruktiv zu ermitteln sind.

   [**Lösungen:** a) B(-3/-5) C(9/4) b) k_i: $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 16$]

4. Am Fuß einer senkrecht abfallenden Felswand schließt sich eine Geröllhalde mit einem Gefälle von 21° an. Zur Ermittlung der Höhe dieser Wand, deren Fußpunkt F schwer zugänglich ist, wurde in der Fallinie der Geröllhalde eine Standlinie c = 415 m abgesteckt. Vom unteren Ende A dieser Standlinie wurde die oberste Kante der Wand unter einem Höhenwinkel $\alpha = 26°$ und vom oberen Endpunkt B unter einem Höhenwinkel $\beta = 29°$ anvisiert. Alle Punkte liegen in derselben Vertikalebene.

   a) Fertige eine Skizze an, die alle Angaben enthält.

   b) Berechne die Höhe der Wand vom Fußpunkt bis zur obersten Kante.

   c) Wie groß ist der Höhenunterschied zwischen A und F, der durch das Gefälle der Geröllhalde bedingt ist?

   Für die einzelnen Lösungsschritte sind Detailskizzen mit genauer Beschriftung zu erstellen. Rechengenauigkeit: 3 Dezimalen.

   [**Lösungen:** b) 103,026 m c) 380,751 m]

9500 Villach, BG/BRG Peraustraße 10
Mag. Horst Windschnurer

1. Ein Falschspieler vermischt in seiner Tasche 7 präparierte mit 3 unpräparierten Würfeln. Die Wahrscheinlichkeit, mit einem präparierten Würfel eine „Sechs“ zu würfeln, ist 1/3.

   a) Er zieht einen Würfel aus der Tasche und wirft ihn 2-mal. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er zweimal „Sechs“ wirft?

   b) Schafft er zwei Sechser, erhält er 3 600 S, andernfalls muß er 760 S zahlen. Sollte er spielen?

   c) Wie oft muß man einen der präparierten Würfel werfen, um mit mindestens 98% mindestens eine „Sechs“ zu werfen?

   d) Der Falschspieler zieht einen Würfel aus der Tasche und wirft eine „Sechs“. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er einen präparierten Würfel zog?

   e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, unter 6 gezogenen Würfeln 5 präparierte zu haben?

   [**Lösungen:** a) 0,086 b) nein: E = -19 c) 10 d) 0,824 e) 0,3]

2. Gegeben: $f(x) = x^2$, $g(x) = e^x$, $h(x) = 5x - 6$.

   a) Löse das Anfangswertproblem $y' - y = g(x) + f(x)$, P(2/-10).

   b) Das von f, h und der x-Achse eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechne V ohne Verwendung der Kegelvolumsformel.

   [**Lösungen:** a) $y_P = (x-2)\cdot e^x - x^2 - 2x - 2$ b) S_1 (2/4) S_2 (3/9) $V_x = \frac{32\pi}{15}$]

3. Zwei Personen derselben Partei möchten für diese noch x verschiedene bzw. y verschiedene Wahlreden halten. Jede Rede von A erzielt 5, jede Rede von B 12 Bonuspunkte in der Wählergunst. Aus Termingründen kann A höchstens 13 Reden halten, Kurzfassungen jeder Rede von A zu je 5 min bzw. jeder Rede von B zu je 9 min müssen aber dazu im Fernsehen gesendet werden. Die Sendeanstalt stellt aber dafür höchstens 92 min zur Verfügung (für beide gemeinsam). Für jede Rede von A wird aber ein Mitarbeiter, für jede Rede von B werden vier Mitarbeiter für Recherchen benötigt. Es stehen aber nur noch 36 Personen zur Verfügung.

   Wie viele Reden können gehalten werden, um maximale Bonuspunkte für die Partei zu erzielen?

   [**Lösungen:** [4 8] $BP_{max} = 116$]

4. Gegeben: ε: $8x - 4y + z = 4$, $P(2/y_P/-5)$, A(2/1/3), B(3/2/7), S(17/-6/6).

   a) Ermittle y_P so, daß $d(P,\varepsilon) = 1$.

   b) Das von A, B, C und P aufgespannte Parallelepiped hat V = O. Ermittle y_P mittels Determinante.

   c) Berechne eine Normalform der von A, B und C aufgespannten Ebene.

   d) Spiegle S an ε.

   [**Lösungen:** a) P_1 $(2/-\frac{1}{2}/-5)$ P_2 (2/4/-5) b) P_1 $(2/-\frac{17}{7}/-5)$ P_2 (2/1/-5) c) $-2x + 14y - 3z = 1$ d) S' (-15/10/2)]

9500 Villach, BG/BRG St. Martiner Straße 7
Mag. Bärbl Christof / Mag. Viktor Lippitsch

1. Das Parallelogramm ABCD [A(2/3/1), B(-4/4/2), C, D] ist die Grundfläche einer geraden, vierseitigen Pyramide und liegt in der Ebene ε: $4x + 7y + 17z = 46$. Die Spitze S(1/8/20) liegt genau senkrecht über dem Mittelpunkt des Parallelogramms.

   a) Berechne die Eckpunkte C und D.

   b) Berechne das Volumen der Pyramide.

   c) Berechne den Winkel, den die Seitenkante AS mit der Grundfläche einschließt.

   [**Lösungen:** a) C(-8/-1/5) D(-2/-2/4) b) V = 236 c) $\alpha = 73{,}02°$]

2. Von einem ebenen, viereckigen Grundstück ABCD kennt man die Seitenlängen a = 75 m und d = 82 m. Weiters kennt man die Winkel $\alpha = 108{,}3°$, $\beta = 115{,}6°$ und $\delta = 66{,}5°$.

   a) Fertige eine Zeichnung in einem geeigneten Maßstab an.

   b) Berechne alle fehlenden Seitenlängen, Winkel und Diagonalen dieses Vierecks.

   c) Berechne die Seitenlängen eines zu diesem Viereck flächengleichen Parallelogramms, wobei die Seite b und der Winkel β gleich bleiben sollen.

   [**Lösungen:** b) b = 73 m c = 132,8 m $\gamma = 69{,}6°$ e = 125,24 m f = 127,32 m c) A = 7 462, 68 m^2 a' = 113,35 m]

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x - 2}$.

   a) Berechne die Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte dieser Funktion sowie die Gleichungen der Pole und Asymptoten.

   b) Zeichne den Graphen der Funktion mit den Asymptoten.

   c) Berechne weiters den Inhalt der Fläche, die vom Graphen der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird.

   [**Lösungen:** a) a_1: x = 2 a_2: y = x + 3 N_1 (-2/0) N_2 (1/0) H(0/1) T(4/9) kein Wendepunkt c) A = 1,955]

4. Der Graph einer Polynomfunktion zweiten Grades hat bei S(2/0) den Scheitelpunkt und geht weiters durch den Punkt P(4/2). Im Punkt P schneidet eine Gerade diese Kurve rechtwinkelig.

   a) Ermittle von beiden Funktionen den Funktionsterm.

   b) Berechne den zweiten Schnittpunkt dieser Funktionen.

   c) Die beiden Funktionsgraphen schließen ein endliches Flächenstück ein. Berechne den Inhalt dieses Flächenstücks.

   d) Zeichne die Graphen der beiden Funktionen.

   [**Lösungen:** a) f: $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$ g: $y = -\frac{1}{2}x + 4$ b) S_2 $(-1/\frac{9}{2})$ c) $A = \frac{125}{12}$]

9500 Villach, BG/BRG St. Martiner Straße 7
Mag. Christa Haimann

1. Zwei gleich hoch liegende Punkte A und B, die sich auf verschiedenen Seiten einer Schlucht befinden, sollen durch eine Hängebrücke verbunden werden. Von einem höher gelegenen Punkt P werden A und B vermessen: Man sieht A unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 26{,}25°$ und nach Schwenken des Fernrohrs um den Horizontalwinkel $\gamma = 58{,}56°$ den Punkt B unter dem Tiefenwinkel $\beta = 35{,}75°$. PA = 52,23 m, PB = 32,18 m.

   a) Berechnen Sie die Entfernung AB.

   Bei Belastung kann die Hängebrücke durch eine Polynomfunktion 2. Grades beschrieben werden, welche durch die Punkte (-20/0), (20/0) und (0/-2) geht.

   b) Bestimmen Sie die Gleichung dieser Funktion und fertigen Sie eine Skizze an.

   c) Wie groß ist der Winkel, den die Funktion mit der x-Achse einschließt?

   [**Lösungen:** a) AB = 40,034 m b) $y = \frac{1}{200}x^2 - 2$ c) $\alpha = 11{,}3°$]

2. Von einer Kugel kennt man den Punkt A(-2/1/-2) und eine Tangentialebene τ: x + 5y + z = 29 mit dem Berührpunkt B(4/5/0).

   a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel, sowie den Winkel, unter dem die Tangentialebenen in A und B einander schneiden.

   b) Vom Punkt S(-3/6/2) werden alle Tangenten an die Kugel gelegt. Diese erzeugen einen Kegel. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Berührkreises dieses Tangentenkegels. Der Berührkreis ist Basiskreis eines zweiten Kegels K_2, dessen Spitze der Mittelpunkt der Kugel ist. Überprüfen Sie: Die Höhe des Tangentenkegels ist doppelt so groß wie die Höhe des Kegels K_2.

   [**Lösungen:** a) $(x-3)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 27$ $\alpha = 87{,}9°$ b) M_1 (1/2/0) $r_1 = 3 \cdot \sqrt{2}$ $h_1 = 6$ $h_2 = 3$]

3a) Einem Drehellipsoid, das durch die Drehung der Ellipse ell: $x^2 + 2y^2 = 24$ um die y-Achse entsteht, ist der volumsgrößte koaxiale Drehzylinder einzuschreiben. Berechnen Sie die Abmessungen und das Volumen des Zylinders. Fertigen Sie eine genaue Skizze an.

3b) Das Ellipsoid erhält eine kreisförmige Bohrung, deren Radius gleich dem des Zylinders ist. Berechnen Sie das Volumen des ringförmigen Restkörpers. Wieviel % beträgt der Abfall?

[**Lösungen:** a) r = h = 4 $V_{max} = 64\pi$ b) $V = \frac{64\pi}{3}$ 80,755%]

4a) Eine Firma hat ein pestizidfreies Mittel gegen Blattläuse entwickelt und testet dieses durch Behandlung von 100 befallenen Sträuchern. 70 Sträucher werden durch einmalige Anwendung völlig von den Blattläusen befreit.

   a1) In welchem Konfidenzbereich befindet sich der tatsächliche Erwartungswert mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit?

   a2) Wie viele Sträucher müßte man behandeln, um den tatsächlichen Anteil mit 99%-iger Sicherheit auf 1% genau zu bestimmen?

4b) Die Firma bietet das Mittel im Handel an und behauptet, daß die Erfolgsquote 70% sei. Ein Gärtner behandelt 20 befallene Sträucher.

   b1) Wie groß ist bei 70% Erfolgsquote die Wahrscheinlichkeit, daß alle Sträucher / weniger als 14 Sträucher nach der Behandlung blattlausfrei sind?

   b2) Das Mittel hat nur bei 10 der 20 Sträucher die Blattläuse vertrieben. Mit welcher Irrtumswahrscheinlichkeit kann der Gärtner behaupten, daß die Erfolgsquote geringer als 70% ist?

   [**Lösungen:** a1) [61 ; 79] a2) 16 641 b1) 0,08% 39,199% b2) 4,796%]

5. Eine Tablette enthält 50 mg eines Wirkstoffes, welcher das Konzentrationsvermögen beeinträchtigt. Der Abbau dM dieses Wirkstoffes in der Zeiteinheit dt erfolgt proportional zu der im Körper vorhandenen Menge M. Erfahrungsgemäß werden in einer Stunde 40% der vorhandenen Menge abgebaut. $M(0) = M_0$.

   a) Leiten Sie M(t) ab (= Abbaugesetz).

   b) Wie lange dauert es, bis die Wirkung einer Tablette verschwindet, d.h. nur mehr 5 mg des Wirkstoffes im Körper sind?

   c) Jemand nimmt um 8 h und um 10 h eine Tablette. Wieviel mg des Wirkstoffs sind um 15 h noch im Körper?

   [**Lösungen:** a) $M(t) = M_0 \cdot e^{-0,5108256 \cdot t}$ b) ≈ 4,5 Stunden c) 5,288 mg]

9560 Feldkirchen, BRG Flurweg 3
Mag. Siegfried Moser

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 6\cdot(x-2)\cdot e^{-x}$ über $\mathbb{R}$.

   a) Diskutiere die Funktion. Bestimme Definitionsmenge, Nullstelle, Extremwert, Wendepunkt und Asymptote.

   b) Fertige eine Zeichnung im Bereich $1{,}5 \le x \le 6$ an.

   c) Berechne die Fläche, die von der Funktion und der x-Achse im Bereich $2 \le x < \infty$ eingeschlossen wird.

   d) Bilde ein rechtwinkeliges Dreieck mit einem Eckpunkt in der Nullstelle, einer Kathete auf der x-Achse und einem Eckpunkt P(x/y) auf der Kurve. Wie groß kann die Dreiecksfläche höchstens werden?

   [**Lösungen:** a) a: y = 0 N(2/0) H(3/0,30) W(4/0,22) c) A = 0,812 d) P = W(4/0,22) $A_{max} = 0{,}220$]

2. Gegeben ist die Gleichung $z^2 - (3+2i)\cdot z + (5+5i) = 0$.

   a) Löse diese Gleichung in $\mathbb{C}$ und überprüfe die Richtigkeit der beiden Lösungen mit dem Satz von VIETA.

   b) Gib die Lösungen in Polarkoordinaten an.

   c) Stelle eine quadratische Gleichung auf, die $\frac{1}{z_1}$ und $\frac{1}{z_2}$ als Lösungsmenge besitzt.

   [**Lösungen:** a) {2-i , 1+3i} b) $\{(\sqrt{5}/333{,}43°), (\sqrt{10}/71{,}57°)\}$ c) $z^2 + (-\frac{1}{2} + \frac{i}{10})\cdot z + (\frac{1}{10} - \frac{i}{10}) = 0$]

3. Die Spitze einer geraden, quadratischen Pyramide ist S(8/4/1), die Basis ist A(4/-1/3), B(x/y>0/z>0). Der Mittelpunkt des Basisquadrates ist F(x/3/-1).

   a) Berechne die fehlenden Koordinaten der Eckpunkte, das Volumen der Pyramide und den Neigungswinkel der Seitenkanten zur Grundfläche.

   b) Wie groß ist der Abstand des Punktes F von den Dreiecken des Mantels der Pyramide ?

   [**Lösungen:** a) F(6/3/-1) B(2/7/1) C(8/7/-5) D(10/-1/-3) V = 72 $\alpha = 26{,}57°$ b) $d = \sqrt{6}$]

4. Vom Punkt P_{12} (-6/3) werden an die Parabel par: $y^2 = 12x$ die Tangenten t_1 und t_2 gelegt.

   a) Berechne den Winkel, den die Tangenten einschließen.

   b) Die Tangente t_3 ist zur Polaren p des Punktes P_{12} parallel. Berechne für das Dreieck, dessen Seiten die Trägergeraden t_1, t_2 und t_3 bilden, den Flächeninhalt A.

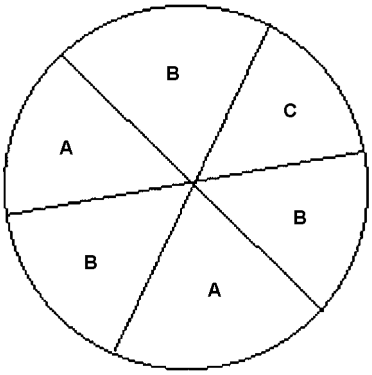
   c) Zeige, daß der Umkreis dieses Dreiecks durch den Brennpunkt F(3/0) der Parabel geht.

   d) Zeichne eine begleitende Skizze !

   [**Lösungen:** a) t_1: x - 2y = -12 t_2: x + y = -3 $\alpha = 71{,}565°$ b) t_3: 4x - 2y = -3 $P_{13}\,(3/\frac{15}{2})$ $P_{23}\,(-\frac{3}{2}/-\frac{3}{2})$ A = 30,375

   c) k_u: $(x+\frac{3}{4})^2 + (y-\frac{15}{4})^2 = \frac{450}{16}$]

5. Gegeben ist das abgebildete Glücksrad.



a) Zeichne einen logischen Baum für drei Umdrehungen.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß dreimal hintereinander der Buchstabe A kommt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei drei Umdrehungen alle drei Buchstaben in beliebiger Reihenfolge auftreten?

d) Wie oft muß das Glücksrad mindestens gedreht werden, damit mit 99% Wahrscheinlichkeit der Buchstabe C auftritt?

[**Lösungen:** b) 0,037 c) 0,167 d) 26]

9560 Feldkirchen, BRG Flurweg 3
Mag. Jutta Stromberger

1. Gegeben ist eine Funktion f: $y = 4x \cdot e^{-x+1}$.

   a) Diskutiere diese Funktion (Nullstellen, Extrema, Wendepunkt, Wendetangente, Verhalten für $x \to \infty$) und zeichne den Graphen.

   b) Berechne die Fläche zwischen Kurve, x-Achse und Wendetangente.

   c) Der Fläche zwischen Kurve und x-Achse im 1. Quadranten ist das rechtwinkelige Dreieck mit dem größten Flächeninhalt einzuschreiben. Der Scheitel des rechten Winkels liegt auf der x-Achse, ein Eckpunkt im Koordinatenursprung und ein weiterer auf der Kurve. Wie groß ist die Fläche des Dreiecks?

   [**Lösungen:** a) a: y = 0 N(0/0) H(1/4) W(2/2,94) t_W: $y = -\frac{4}{e}x + \frac{16}{e}$ b) A = 9,402 c) x = 2 $A_{max} = \frac{8}{e}$]

2. Vom Fuß und von der Spitze eines am Flußufer stehenden Turmes der Höhe h = 45 m visiert man zum Gipfel einer am jenseitigen Ufer unter $\varphi = 78°$ emporstrebenden Felswand und mißt die Höhenwinkel $\alpha = 41{,}6°$ und $\beta = 48{,}2°$.

   a) Wie hoch liegt der Gipfel über dem Flußufer?

   b) Unter welchem Höhenwinkel erscheint vom Fußpunkt des Turmes ein Kletterer, der sich in halber Höhe in der Wand befindet?

   [**Lösungen:** a) 218,26 m b) $\beta_1 = 32{,}40°$]

3. Ebene ε_1 : 5x + 4y + 3z = -20

   Gerade g: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

   Ebene ε_2 durch A(3/8/1), B(3/5/5), D(8/4/-2)

   a) Untersuche, ob der Punkt A auf der Geraden g liegt und bestimme Schnittpunkt und Schnittwinkel von g und ε_1. Stelle die Gleichung von ε_2 auf und untersuche ihre Lagebeziehung zu ε_1 (Begründung).

   b) Bestimme C so, daß das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist und berechne seinen Flächeninhalt.

   c) Der Punkt T(5/6/6) wird an der Geraden g gespiegelt. Berechne die Koordinaten des Spiegelpunktes T'.

   [**Lösungen:** a) $A \in g$ S(1/-4/3) $\alpha = 33{,}52°$ ε_2: 5x + 4y + 3z = 50 $\varepsilon_2 \,||\, \varepsilon_1$ b) C(8/1/2) $A = 25 \cdot \sqrt{2}$ c) T' (1/10/-4)]

4. Bei einem Buchstabenlegespiel befinden sich in einer Urne 16 gleichartige Plättchen, von denen 5 den Buchstaben A, 5 den Buchstaben E, 3 den Buchstaben S und 3 den Buchstaben T tragen.

   a) Ein Spieler zieht nacheinander drei Plättchen und legt sie von links nach rechts auf den Tisch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Buchstaben das Wort „AST“ ergeben?

   b) Nun zieht der Spieler ein Plättchen, notiert den Buchstaben und legt das Plättchen zurück. Nun zieht er das nächste, schreibt den Buchstaben rechts neben den ersten usw. Der Spieler zieht auf diese Weise fünf Plättchen und erhält so ein Wort mit fünf Buchstaben. Berechne die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

      b1) „Es kommt genau zweimal der Buchstabe S vor.“

      b2) „Die Buchstaben ergeben das Wort Tasse.“

   c) Der Inhalt der Urne wird nun abgeändert, indem ein zusätzliches Plättchen mit dem Buchstaben C hineingemischt wird. Wie oft muß der Spieler mindestens (mit Zurücklegen) ziehen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% dieses Plättchen mit dem Buchstaben C zieht?

   [**Lösungen:** a) 0,013 b1) 0,189 b2) 0,00064 c) 38]

9620 Hermagor, BORG 10.-Oktober-Straße 9
Mag. Gerald Flaschberger

1. Das Parallelogramm ABCD mit A(3/-3/3), B(5/1/-1), C(1/5/1) bildet die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze im Koordinatenursprung O.

   a) Berechne D und zeige, daß die Pyramide gerade und quadratisch ist.

   b) Berechne das Volumen, die Oberfläche und den Neigungswinkel zwischen einer Seitenfläche und der Grundfläche.

   [**Lösungen:** a) D(-1/1/5) b) V = 36 O = 86,912 $\alpha = 45°$]

2. Ein Auto wird bei einer Anfangsgeschwindigkeit von $v_0 = 36$ m/s ($\approx$ 130 km/h) ab dem Zeitpunkt t = 0 s mit einer Bremsverzögerung $a(t) = t^2 - 6t$ (gilt bis zum Stillstand) abgebremst.

   a) Berechne die v(t)- und s(t)-Funktion (Erklärung).

   b) Wann kommt das Auto zum Stillstand und wie groß ist der Bremsweg?

   c) Nach welcher Zeit hat der Wagen noch die halbe Anfangsgeschwindigkeit und wieviel % des Bremsweges sind dabei zurückgelegt worden?

   d) Zeichne ein v-s-Diagramm, indem du für Zeiten ab t = 0 bis zum Stillstand v(t) und s(t) berechnest.

   [**Lösungen:** a) $v(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 36$ $s(t) = \frac{1}{12}t^4 - t^3 + 36t$ b) 6 s 108 m c) 3 s 81,25%]

3. Die Funktion $y = e^{kx}\cdot(x+c)^2$ mit c < 0 hat im Punkt P(0/1) die Tangente y = -x + 1.

   a) Bestimme die Funktionsgleichung und zeichne den Graphen im Bereich $-4 \le x \le 1{,}5$.

   b) Berechne die Nullstellen, Extrema und Wendepunkte und zeichne sie in den Graphen ein.

   c) Berechne die Fläche zwischen dem Kurvenstück und den positiven Koordinatenachsen zuerst mit der Simpson-Näherung, dann exakt.

   [**Lösungen:** a) $y = e^x\cdot(x-1)^2$ b) N = T(1/0) H(-1/1,47) W_1 (-2,41/1,04) W_2 (0,41/0,52) c) A = 0,437]

4. Ein Kreis, dessen Mittelpunkt auf der y-Achse liegt, berührt die Parabel $y = \frac{x^2}{4}$ im Punkt T($\sqrt{32}$/8).

   a) Berechne die Fläche zwischen Kreis und Parabel sowie deren gemeinsame Tangente.

   b) Parabel und Kreis rotieren um die y-Achse. Es entsteht ein Paraboloid, in dem eine Kugel liegt. Wie groß ist das Volumen dazwischen?

   c) Die Kugel wird geschmolzen. Wie hoch steht die Schmelzflüssigkeit im Paraboloid?

   d) Wie groß darf der Radius einer Kugel maximal sein, damit diese den tiefsten Punkt des Paraboloids noch berührt?

   [**Lösungen:** k: $x^2 + (y-10)^2 = 36$ a) A = 27,339 t: $y = 2\cdot\sqrt{2}\,x - 8$ b) $V_y = \frac{160\pi}{3}$ c) h = 12 d) r = 2]

9620 Hermagor, BORG 10.-Oktober-Straße 9
Mag. Hermann Pichler

1. Aus 2 300 Bakterien werden in 5,3 Stunden 3 400. Das Wachstumsgesetz genüge der Differentialgleichung

   a) $dy = K \cdot y \cdot dt$ (exponentielles Wachstum)

   b) $\frac{dy}{y} = K \cdot y \cdot dt$ (überexponentielles Wachstum)

   Gib das jeweilige Wachstumsgesetz an und zeichne den Graphen. Wann gibt es doppelt so viele, wann 20 000 Bakterien?

   [**Lösungen:** a) $y(t) = 2300 \cdot e^{0,07375 \cdot t}$ Verdoppelungszeit: 9,399 h $t_{20\,000} = 29,327$ h

   b) $y(t) = \frac{2300}{1 - 0,06104 \cdot t}$ Verdoppelungszeit: 8,191 h $t_{20\,000} = 14,499$ h]

2. Das Parallelogramm ABCD [A(2/3/1), B(-4/4/2), C, D] liegt in der Ebene ε: $4x + 7y + 17z = 46$ und ist Grundfläche einer geraden Pyramide mit Spitze S(1/8/20).

   Berechne C, D, das Volumen sowie den Winkel zwischen Seitenkante und Grundfläche.

   [**Lösungen:** C(-8/-1/5) D(-2/-2/4) V = 236 $\alpha = 80°$]

3. Ein gerades Prisma hat ein Dreieck ($a = 22,5$ cm, $c = 17,4$ cm, $\alpha = 84,12°$) als Grundfläche. Es wird schräg abgeschnitten, sodaß die Höhen über den Eckpunkten $h_A = 12,5$ cm, $h_B = 14,8$ cm, $h_C = 19,2$ cm betragen.

   Berechne die Seiten und Winkel der Schnittfläche. Unter welchem Winkel ist die Schnittfläche zur Grundfläche geneigt?

   [**Lösungen:** a' = 22,93 b' = 17,49 c' = 17,55 $\alpha' = 81,72°$ $\beta' = 49,03°$ $\gamma' = 49,25°$ $\varphi = 22,98°$]

4. Durch f: $y^2 = x^2 \cdot (16 - x^2)$ ist eine Schleife gegeben.

   a) Diskutiere und zeichne f.

   b) Berechne die von f eingeschlossene Fläche sowie das Rotationsvolumen V_x.

   [**Lösungen:** a) N_1 = W(0/0) N_{23} (±4/0) H(±2·$\sqrt{2}$/8) T(±2·$\sqrt{2}$/-8) b) $A = \frac{256}{3}$ $V_x = \frac{4096\pi}{15}$]

9620 Hermagor, BORG 10.-Oktober-Straße 9
Mag. Jeremias Thalmann

1. A(3/3/-1) ist Eckpunkt der Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide. Die Höhe h = 9 liegt auf der Trägergeraden g: $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

   a) Bestimme die Gleichung der Ebene, in der die Grundfläche ABC der Pyramide liegt.

   b) Berechne die fehlende Koordinate des Eckpunktes $B(x_B/-9/1)$.

   c) Berechne die Koordinaten des Eckpunktes $C(x_C/y_C/z_C)$, der Berührungspunkt der Kugel k: $x^2 + y^2 + z^2 - 20x + 4y - 10z + 48 = 0$ mit der Grundebene ε ist.

   d) Berechne die Koordinaten der Spitze der Pyramide (2 Lösungen).

   e) Berechne das Volumen der Pyramide.

   f) Berechne den Winkel, den die Grundfläche der Pyramide mit der Fläche ABS einschließt.

   [**Lösungen:** a) ε: 4x - y + 8z = 1 b) B(-4/-9/1) c) C(6/-1/-3) d) S_1 (2/6/10) S_2 (-6/8/-6) e) V = 108 f) α = 51,914°]

2. Die Parabel $y^2 = 4x$ wird von der Gerade $g: x = 8$ geschnitten. Das dabei entstandene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Diesem Paraboloid ist ein Zylinder (Grundkreise konzentrisch) von größtem Rauminhalt einzuschreiben. Weiters erzeugen die Tangenten in den Schnittpunkten der Geraden g mit der Parabel ein Dreieck, dessen Spitze auf der x-Achse liegt und das durch die Gerade g begrenzt wird. Durch Rotation dieses Dreiecks um die x-Achse entsteht ein Drehkegel.

   a) Fertige eine exakte Zeichnung an (par, g, Tangenten, Zylinder).

   b) Berechne das Volumen des Kegels und gib das Verhältnis der Rauminhalte von Zylinder, Kegel und Paraboloid an.

   [**Lösungen:** b) Zylinder: r = h = 4 $V_{max} = 64\pi$ $V_{Kegel} = \frac{512\pi}{3}$ $V_{par} = 128\pi$ $V_{max} : V_{Kegel} : V_{par} = 3 : 8 : 6$]

3. Der Graph einer Polynomfunktion 3. Grades besitzt an der Stelle x = 3 ein Extremum und an der Stelle x = 2 einen Wendepunkt. Die Gleichung der Wendetangente lautet: t_W: 3x + y = 4.

   a) Ermittle die Funktionsgleichung.

   b) Diskutiere die Funktion und zeichne t_W sowie den Graphen im Intervall [0;4].

   c) Berechne den Inhalt jenes endlichen Flächenstücks, das vom Graphen, der y-Achse und der Wendetangente begrenzt wird.

   d) Das vom Graphen der Funktion und der x-Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des so entstehenden Rotationskörpers.

   [**Lösungen:** a) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ b) N_1 = H(1/0) N_2 (4/0) T(3/-4) W(2/-2) c) $A = \frac{14}{3}$ d) $V_x = \frac{832\pi}{35}$]

4. Von einem Punkt A einer horizontalen Ebene erscheint der Gipfel S_1 eines Berges unter dem Höhenwinkel α = 10,2°. Die Spitze S_1 wird von einer genau dahinter liegenden zweiten Bergspitze S_2 überragt. Der von A aus gemessene Höhenwinkel ist um 3,1° größer. Geht man von A 3 000 Meter in Richtung des Berges S_1, so erscheinen beide Gipfel in einer Linie unter dem Höhenwinkel β = 17,3°.

   a) Berechne die absolute Höhe beider Berge (3 Dezimalen), wenn der Punkt A 357 m über dem Meeresspiegel liegt.

   b) Wie groß erscheint die Entfernung (Luftlinie) der beiden Gipfel in einer Wanderkarte im Maßstab 1 : 50 000?

   c) Wie weit ist der Punkt A tatsächlich von S_1 entfernt?

   [**Lösungen:** a) H_1 = 553,672 m H_2 = 3 299,136 m b) 17,48 cm c) AB + BS_1 = 3 661,360 m]

9800 Spittal an der Drau, BG Zernattostraße 10
Dr. Wolfgang Gmeiner

1. Vergleiche die beiden Funktionen f_1: $y = x \cdot \ln x$ und f_2: $y = x^2 \cdot \ln x$ auf R^+ bezüglich der Nullstellen, Extrema, Wendepunkte und der Fläche zwischen Kurve und x-Achse. Untersuche insbesondere das Verhalten im Ursprung. Skizziere beide Kurven in einer Figur (Maßstab 5:1).

   [**Lösungen:** f_1: N(1/0) $T(\frac{1}{e}/-\frac{1}{e})$ kein Wendepunkt f_2: N(1/0) $T(\frac{1}{\sqrt{e}}/\frac{1}{2e})$ $W(\frac{1}{e\cdot\sqrt{e}}/-\frac{3}{2e^3})$ gleiche Steigung in N(1/0) Verhalten im Ursprung: $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x) = 0$ „berührt y-Achse" $\lim\limits_{x \to 0} f_2(x) = 0$ „berührt x-Achse"]

2. Bestimme die Kehlpunkte der beiden windschiefen Geraden

   g_1: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ und g_2: $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   sowie ihren kürzesten Abstand.

   [**Lösungen:** U(2/3/5) V(1/-1/-3) d = 9]

3. Zeige, daß die Schnittpunkte der Trägergeraden der Seiten des Dreiecks A(0/5), B(-4/-3), C(0/-5) mit den in den gegenüberliegenden Ecken an den Umkreis gelegten Tangenten auf einer Geraden liegen.

   [**Lösungen:** k_u: $x^2 + y^2 = 25$ U(-20/5) = $t_A \cap BC$ $V(0/-\frac{25}{3}) = t_B \cap AC$ W(-5/-5) = $t_C \cap AB$ U,V,W $\in$ g: 2x + 3y = -25]

4. Löse die Gleichung $z^{12} = 0$ sowohl algebraisch durch Zerlegen in Faktoren als auch durch Teilung des Einheitskreises. Numeriere die Lösungen nach der Größe des Arguments und bestimme mittels der MOIVREschen Formel das Produkt aller Lösungen.

   [**Lösungen:** $z_0 = 1$ $z_{12} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $z_3 = -1$ $z_{45} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ $z_6 = -i$ $z_{78} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i$ $z_9 = i$ $z_{10\,11} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i$

   $\prod\limits_{k=0}^{11} z_k$ = cos (30·(1+2+…+11)) + i·sin (30·(1+2+…+11)) = cos 180 + i·sin 180 = - 1]

9800 Spittal an der Drau, BG Zernattostraße 10
Mag. Josef Gröchenig

1. Der Graph der Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat die Nullstellen bei $x = -2$ und $x = 4$. In der Nullstelle $x = 4$ hat $f(x)$ die Steigung $k = -2$. Die Funktion $g(x)$ hat die Funktion $f(x)$ als Ableitungsfunktion und hat an der Stelle $x = 1$ den Funktionswert 0.

   a) Berechne $f(x)$ und $g(x)$.
   b) Diskutiere $f(x)$ und $g(x)$ und zeichne die Graphen im Intervall [-5;7].
   c) Berechne den Flächeninhalt zwischen $f(x)$, $g(x)$ und den Geraden h_1: $x = -2$ und h_2: $x = 1$.

   [**Lösungen:** a) $f(x) = \frac{1}{3}\cdot(-x^2 + 2x + 8)$ $g(x) = \frac{1}{9}\cdot(-x^3 + 3x^2 + 24x - 26)$ b) f: N_1 (-2/0) N_2 (4/0) H(1/3)
   g: N_1 (-4,2/0) N_2 = W(1/0) N_3 (6,2/0) T(-2/-6) H(4/6) c) A = 17,25]

2. Eine Hyperbel hat dieselben Brennpunkte wie die Ellipse $3x^2 + 5y^2 = 120$. Der Ellipsenpunkt P(5/y>0) ist zugleich ein Hyperbelpunkt. Die Tangenten in P an die Ellipse und die Hyperbel schneiden die y-Achse in den Punkten Q und R.

   a) Berechne die Gleichung der Hyperbel.
   b) Überprüfe, ob Q und R auf einem Kreis liegen, der durch der Punkt P und durch die beiden Brennpunkte F_1 und F_2 verläuft.

   [**Lösungen:** a) $3x^2 - 5y^2 = 30$ b) t_{ell}: $y = -x + 8$ t_{hyp}: $y = x - 2$ Q(0/8), R(0/-2) $\in$ k: $x^2 + (y-3)^2 = 25$]

3a) Das radioaktive Kohlenstoffisotop C-14 hat eine Halbwertszeit von 5 730 Jahren. In Holzresten stellte man 14,5% des ursprünglichen C-14 Gehaltes fest.

   a1) Wie alt sind diese Holzreste ?
   a2) Bis zu welchem Alter kann man diese Methode verwenden, wenn noch 1% des ursprünglichen C-14 Gehaltes festgestellt werden kann?

3b) $f(x) = x^2 \cdot e^x$

   b1) Bestimme die Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkt der Funktion.
   b2) Zeichne den Graphen im Intervall [-3;1].
   b3) Wie groß ist die Fläche, die von $f(x)$, der x-Achse und der Geraden $x = -2$ begrenzt wird?

   [**Lösungen:** a1) 15 963 Jahre a2) 38 000 Jahre b1) N = T(0/0) H(-2/0,54) W_1 (-3,41/0,38) W_2 (-0,59/0,19)
   b3) A = 0,65]

4. Dem Paraboloid, das durch Drehung der Parabel $y^2 = 2px$ um die x-Achse zwischen $x = 0$ und $x = 4p$ entsteht, ist ein liegender Zylinder größten Volumens einzuschreiben.

   a) Berechne die Maße des Zylinders.
   b) Wieviel Prozent beträgt der Abfall, wenn der Zylinder aus dem Paraboloid herausgeschnitten wird?

   [**Lösungen:** a) $r = h = 2p$ $V_{max} = 8\pi p^3$ b) $V_{par} = 16\pi p^3$ 50%]

9800 Spittal an der Drau, BRG Zernattostraße 10
Mag. Ernst Hofer / Mag. Heimo Senger

1. Gegeben ist das Dreieck ABC [A(-13/-10), B(15/-10), C(5/14)].

   Es ist rechnerisch und zeichnerisch zu zeigen, daß die Streckensymmetrale der Seite BC und die Winkelsymmetrale des Winkels α einander in einem Punkt des Umkreises des gegebenen Dreiecks schneiden.

   [**Lösungen:** s_{BC}: $-5x + 12y = -26$ w_α: $x - 2y = 7$ $S(16/\frac{9}{2}) \in k_u$: $(x-1)^2 + (y+\frac{7}{4})^2 = (\frac{65}{4})^2$]

2. Die beiden Wendepunkte des Graphen der Polynomfunktion f: $y = \frac{1}{2} \cdot (x + 2x^3 - x^4)$ und der Schnittpunkt der Wendetangenten bestimmen ein Dreieck.

   In welchem Verhältnis teilt die Kurve den Flächeninhalt des Dreiecks? Fertigen Sie auch eine Zeichnung mit geeignetem Vergrößerungsmaßstab an.

   [**Lösungen:** W_1 (0/0) t_1: $-x + 2y = 0$ W_2 (1/1) t_2: $-3x + 2y = -1$ $S(\frac{1}{2}/\frac{1}{4})$ $A_1 = 0{,}1$ $A_2 = 0{,}025$ $A_1 : A_2 = 4 : 1$]

3. Die Ellipse ell: $9x^2 + 25y^2 = 450$ wird in P(5/y>0) von einer Hyperbel in 1. Hauptlage geschnitten, die dieselben Brennpunkte wie die gegebene Ellipse hat.

   a) Ermitteln Sie die Gleichung der Hyperbel.

   b) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die von Ellipse und Hyperbel im ersten und vierten Quadranten umschlossene Fläche um die x-Achse rotiert.

   c) Wie groß ist der Schnittwinkel zwischen den beiden Kegelschnitten?

   d) Konstruieren Sie die beiden Kegelschnitte mit Hilfe der Schmiegekreise.

   [**Lösungen:** a) $x^2 - y^2 = 16$ b) $V_x = 44{,}567$ c) $\alpha = 90°$]

4a) Herr Maier hat zu Jahresbeginn ein Sparbuch eröffnet, dessen Einlagen mit 5,5% p.a. verzinst werden. Wie groß ist jeweils sein Sparguthaben am Ende des 10. Jahres (ohne Berücksichtigung der Bankspesen und der KEST), wenn er entweder

   a1) zu Beginn jeden Jahres 24 000 ATS oder

   a2) zu Beginn jeden Monats 2 000 ATS einlegt?

   a3) Wie groß müßte eine einmalige Einlage zum Zeitpunkt der Sparbucheröffnung sein, damit am Ende des 10. Jahres der in (a1) erreichte Guthabensstand erreicht wird?

4b) Berechnen Sie die Lösungen der Gleichung $z^3 = 7 - i$ in $\mathbb{C}$ und geben Sie diese

   b1) in Polarkoordinatendarstellung und

   b2) in Binomialform a + bi jeweils auf 2 Dezimalen an.

   b3) Stellen Sie weiters die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene dar.

   [**Lösungen:** a1) 326 003,96 ATS a2) 318 214,37 ATS a3) 190 852,69 ATS
   b) $z_0 = (1{,}92/117{,}29°) = -0{,}88 + 1{,}71i$ $z_1 = (1{,}92/237{,}29°) = -1{,}04 - 1{,}62i$ $z_2 = (1{,}92/357{,}29°) = 1{,}92 - 0{,}09i$]

9800 Spittal an der Drau, BORG Zernattostraße 10
Dr. Peter Elwitschger

1. Diskutiere die Funktion $y = x\cdot(\ln x - 2)$ und zeichne den Graphen. Berechne den Flächeninhalt, den der Graph mit der x-Achse und der Geraden $x = 1$ einschließt.

   [**Lösungen:** N(7,39/0) T(2,72/-2,72) kein Wendepunkt A = 12,4]

2. Die beiden Kurven k_1: $y^2 = 3x$ und k_2: $2y^2 = 9\cdot(x-1)$ begrenzen ein Flächenstück. Zeichne die beiden Kurven und berechne

   a) den Flächeninhalt und

   b) das Volumen des Drehkörpers, der bei Rotation des Flächenstücks um die x-Achse entsteht.

   [**Lösungen:** S_{12} (3/±3) a) A = 4 b) $V_x = 9\pi$]

3. In einer bestimmten Entfernung von einer Felswand, die unter $\varphi = 72{,}3°$ gegen die Horizontale geneigt ist, steht ein Turm mit einer Hohe von 45 m. Vom Fußpunkt und von der Spitze dieses Turmes werden in derselben Vertikalebene zum Gipfel der Felswand die Höhenwinkel $\alpha = 39{,}2°$ und $\beta = 34{,}7°$ gemessen.

   a) Wie groß ist die relative Höhe des Gipfels zur Ebene, in der der Turm steht?

   b) Unter welchem Höhenwinkel erscheint vom Fußpunkt des Turmes aus ein Kletterer, der die Hälfte der Wand durchklettert hat?

   [**Lösungen:** a) 298,03 m b) 25,12°]

4. Eine Firma stellt Schrauben her, wobei der produktionsbedingte Ausschuß erfahrungsgemäß 3% ausmacht.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich in einer Packung mit 50 Schrauben

      a1) genau 2,

      a2) mindestens 2 schadhafte Schrauben befinden?

   b) Wie viele Schrauben müßte ein Tester überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine schadhafte Schraube zu entdecken?

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich in einer Lieferung von 10 000 Schrauben

      c1) höchstens 150,

      c2) zwischen einschließlich 100 und 200,

      c3) mehr als 350 schadhafte Schrauben befinden?

   [**Lösungen:** a1) 0,256 a2) 0,445 b) 99 c1) 0,696 c2) 0,122 c3) 0,432]

9800 Spittal an der Drau, BORG Zernattostraße 10
Mag. Irmgard Winkler

1. Diskutiere $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$ und zeichne den Graphen.
   Berechne die Fläche, die die Kurve mit der Tangente in der positiven Nullstelle und der Geraden $x = 5$ einschließt.

   [**Lösungen:** a_{12}: $x = \pm 2$ a_3: $y = 1$ N_{12} $(\pm 3/0)$ t_1: $y = \frac{6}{5}x - \frac{18}{5}$ $T(0/\frac{9}{4})$ kein Wendepunkt $A = 1{,}353$]

2. Den beiden Halbellipsen
   $9x^2 + 25y^2 = 225, \quad y \geq 0$ und
   $16x^2 + 25y^2 = 400, \quad y \leq 0$
   wird ein Rechteck mit maximaler Fläche eingeschrieben.

   a) Berechne die Fläche des Rechteckes.
   b) Berechne das Verhältnis der Fläche des Rechteckes zur Gesamtfläche.

   [**Lösungen:** a) $x = 3{,}54$ $A_{max} = 35$ b) $A_{ell} = 54{,}97$ $A_{max} : A_{ell} = 1 : 1{,}57$]

3. Von einer quadratischen Pyramide ABCDS kennt man folgende Bestimmungsstücke: B(-4/0/11), C(0/-5/0), D(12/y/3), S(3/7/3).

   a) Berechne die Koordinaten der fehlenden Punkte.
   b) Zeige, daß der Fußpunkt der Höhe der Halbierungspunkt der Diagonalen ist.
   c) Berechne die Mantelfläche.
   d) Berechne den Winkel zwischen BS und der Grundfläche.

   [**Lösungen:** a) A(8/3/14) D(12/-2/3) b) F(4/-1/7) c) $M = 273{,}781$ d) $\alpha = 45°$]

4. In einer Schachtel sind 16 rote, 8 weiße und 6 schwarze Kugeln. 6 Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 3 rote Kugeln darunter sind?
   b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens 3 weiße Kugeln darunter sind?
   c) Es wurden 3 Kugeln verloren. Die Wahrscheinlichkeit, hintereinander 2 rote Kugeln zu ziehen, beträgt nun 7/27. Wie viele rote Kugeln wurden verloren?
   d) Wie viele schwarze Kugeln müßte man in die Schachtel (mit den ursprünglich 30 Kugeln) geben, damit die Wahrscheinlichkeit, hintereinander 2 schwarze Kugeln zu ziehen, 3/44 beträgt?

   [**Lösungen:** a) 0,739 b) 0,971 c) 2 d) 3]

9800 Spittal an der Drau, BORG Zernattostraße 10
Mag. Irmgard Winkler

1. Diskutiere $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$ und zeichne den Graphen.

   Berechne das Volumen, das entsteht, wenn die Fläche begrenzt von der Kurve, der x-Achse und der Geraden x = 3 um die x-Achse rotiert.

   [**Lösungen:** a_1: x = 0 a_2: y = 0 N(0,14/0) H(0,37/2,72) W(0,61/2,47) $V_x = 8{,}845\pi$]

2. Vom Standpunkt A einer Böschung, die unter $\varepsilon = 32°$ zu einem Fluß abfällt, sieht man auf der anderen Seite des Flusses die Spitze einer Felswand unter dem Höhenwinkel $\alpha = 10°$. Der Neigungswinkel der Wand wurde mit 75° gemessen. Steigt man 50 m die Böschung hinunter, sieht man die Spitze unter dem Höhenwinkel $\alpha' = 17{,}5°$ und den Fußpunkt unter dem Tiefenwinkel $\beta' = 17°$.

   a) Wie breit ist der Fluß?
   b) Wie hoch ist die Wand?
   c) Wie weit ist die Spitze vom Fußpunkt der Wand entfernt?
   d) Unter welchem Winkel sieht man von A aus den Fußpunkt der Wand?

   [**Lösungen:** a) 105,65 m b) 140,51 m c) 145,47 m d) 19,8°]

3. Von einer geraden quadratischen Pyramide ABCDS kennt man folgende Bestimmungsstücke: S(1/14/-2), B(-5/-1/z), Fußpunkt F(3/-2/6).

   a) Berechne die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte.
   b) Stelle die Gleichung der Kugel durch die Punkte A, B, C, D und S auf.

   [**Lösungen:** a) A(7/2/13) B(-5/-1/10) C(-1/-6/-1) D(11/-3/2) b) $(x-2{,}25)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 = 11{,}25^2$]

4. Die Polizei führt Alkoholkontrollen durch, bei denen im Durchschnitt 15 von 100 Lenkern alkoholisiert sind.

   a) Wie viele Lenker müssen kontrolliert werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 98% mindestens ein alkoholisierter Lenker ertappt wird?
   b) An einem Abend werden 10 Lenker überprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß höchstens 3 Lenker alkoholisiert sind?
   c) In einem Monat werden 2 500 Lenker überprüft. In welchem „Normalbereich“ liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die Anzahl der alkoholisierten Lenker?
   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Anzahl der alkoholisierten Lenker nicht mehr als $\pm$ 3 vom Erwartungswert abweicht?

   [**Lösungen:** a) 25 b) 0,95 c) [340 ; 409] d) 0,133]