

ARGE Mathematik AHS Kärnten
Mag. Gerhard Hainscho (Hrsg.)

Matura 1996

**Aufgaben zur schriftlichen Reifeprüfung aus
Mathematik im Haupttermin 1995/96**

9020 Klagenfurt, BG für Berufstätige Ferdinand-Jergitsch-Straße 21
Mag. Theresia Egger

1. Gegeben ist ein Dreieck ABC: A(0/0), B(24/0), C(12/9).
Berechnen Sie die Koordinaten folgender spezieller Punkte des Dreiecks: Schwerpunkt S, Höhenschnittpunkt H, Umkreismittelpunkt U, Inkreismittelpunkt I.
[**Lösungen:** S(12/3) H(12/16) U(12/-3,5) I(12/4)]
2. Ein Grundstück gleicht annähernd einem Viereck ABCD, wobei AB = 500 m lang ist. Zur Vermessung des Grundstückes werden folgende Winkel gemessen: $\angle DAC = \alpha = 45^\circ$, $\angle CAB = \beta = 31^\circ$, $\angle ABD = \mu = 38^\circ$, $\angle DBC = \Omega = 42^\circ$.
Berechnen Sie die Länge der Seite CD sowie den Flächeninhalt dieses Grundstückes.
[**Lösungen:** CD = 374,686 A = 130 748,113]
3. Die beiden Kurven $k_1: x^2 + 6y^2 = 25$ und $k_2: y^2 = 4x$ begrenzen im positiven Definitionsbereich ein Flächenstück. Dieses rotiert einmal um die x-Achse und einmal um die y-Achse.
Berechnen Sie jeweils das Volumen des entstehenden Rotationskörpers.
[**Lösungen:** $V_x = \frac{106}{9} \pi$ $V_y = \frac{336}{5} \pi$]
4. Es seien die beiden Funktionen $g(x) = -\frac{3}{4}x^4$ und $f(x)$ gegeben.
Dabei ist $f(x)$ eine Funktion vierten Grades. Sie hat im Ursprung einen Terrassenpunkt. Die Tangente im Wendepunkt an der Stelle $x = 2$ ist parallel zur Geraden $g: y = -4x + 3$.
 - a) Zeigen Sie, daß die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$ lautet.
 - b) Untersuchen Sie die Funktion bezüglich weiterer Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.
 - c) Fertigen Sie eine Zeichnung an ($f(x)$ und $g(x)$).
 - d) Der Graph der Funktion $f(x)$ sowie der Graph der Funktion $g(x)$ begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.[**Lösungen:** $N_1 = W_1 (0/0)$ $N_2 (4/9)$ $T(3/-6,75)$ $W_2 (2/-4)$ $A = 0,05$]

**9020 Klagenfurt, BG/BRG „Ingeborg Bachmann“ Ferdinand-Jergitsch-Straße 21
Mag. Angelika Pessentheiner**

1. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist differenzierbar und geht durch den Punkt $P(1/2e)$. Sie genügt der Differentialgleichung $y' = y \cdot \left(\frac{1}{x} + 1 \right)$.

- a) Berechnen Sie die Funktion und zeichnen Sie den Graphen im Intervall $[-3; 1,2]$.
- b) Berechnen Sie Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte.
- c) Berechnen Sie das Flächenstück, das von f , der x -Achse und der Geraden $x = -3$ eingeschlossen wird.

[**Lösungen:** a) $f: y = 2x \cdot e^x$ b) $N(0/0)$ $T(-1/-0,736)$ $W(-2/-0,54)$ c) $A = 1,602$]

2. Bei einer Tombola sollen 1 200 Lose verkauft werden, darunter sind 324 Gewinnlose.

- a) Wie viele Lose muß man kaufen, um mit 90%-iger Sicherheit mindestens einen Gewinn zu erzielen?
- b) Herr Reich möchte mit 100%-iger Sicherheit mindestens 4 Gewinne machen. Wie viele Lose muß er kaufen? Wie berechnet man die Wahrscheinlichkeit, daß er dann nicht mehr als 4 Gewinne hat (nur Rechenweg)? Wie viele Gewinnlose sind zu erwarten?
- c) Wie viele Gewinne müßte es geben, daß man beim Kauf von 5 Losen mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit mit mindestens einem Gewinn rechnen kann?
- d) Wie groß ist beim Kauf von 50 Losen die Wahrscheinlichkeit, mindestens 12 und höchstens 16 Gewinne zu erzielen?

[**Lösungen:** a) 8 b) alle Nieten + 4 Lose = 880 $E = 237,6$ c) 541 d) 0,568]

3. Im Rahmen des zweigleisigen Ausbaus der Tauernbahn wurde zwischen Penk und Obervellach eine Reihe neuer Bahnbrücken gebaut. Um die große Brücke über den Zwenberggraben zu vermessen, wird der Theodolit (= Vermessungsgerät) in Gratschach auf 722 m Seehöhe (= Instrumentenhöhe) aufgestellt. A sei der Anfangspunkt, B der Endpunkt der Brücke. Es werden folgende Entfernungen und Winkel mit dem Theodoliten gemessen:

Entfernung zu A: 645,88 m, Höhenwinkel: $18,08^\circ$, Horizontalwinkel: 100° ;
Entfernung zu B: 572,81 m, Höhenwinkel: $21,76^\circ$, Horizontalwinkel: $56,48^\circ$.

Der Horizontalwinkel gibt im Uhrzeigersinn die horizontale Abweichung vom Norden an (in Neugrad).

Berechnen Sie die Länge der Brücke, ihre Steigung in % und die exakte Himmelsrichtung.

[**Lösungen:** Länge: 396,16 m Steigung: 2,78% Richtung: N 34° W]

4. Seit Beginn der Erdölförderung vor 137 Jahren sind rund 228 Milliarden Tonnen Erdöl entdeckt worden. Bis einschließlich 1994 wurden davon 46% gefördert. 1995 betrug die Fördermenge 3,2 Mrd t.

Wie viele Jahre reichen die derzeit bekannten Erdölreserven,

- a) wenn der Verbrauch konstant bleibt?
- b) wenn jährlich um je 40 Millionen Tonnen mehr gefördert werden als im Vorjahr?
- c) wenn die Fördermenge jährlich um 2% angehoben wird?
- d) wenn es gelingt, den Verbrauch jährlich um 1% zu senken?
- e) Um wieviel % müßte man den jährlichen Verbrauch senken, um "unendlich lange" Erdöl fördern zu können? Wieviel Öl würde man in diesem Fall im Jahr 2100 abbauen?

[**Lösungen:** a) 38,48 b) 32 c) 28,8 d) 109,21 e) 2,6% Jahr 2100: 201,3 Mio t]

1. Gegeben ist die Kurvenschar $f_t: x \rightarrow \frac{x}{x^2 + t^2}$, $t \in \mathbb{R}^+$.

- Diskutieren Sie f_t .
- Zeichnen Sie in $[-3;3]$ den kartesischen Graphen der Funktion für $t = 1$.
- Zeigen Sie, daß der Inhalt des Flächenstücks, das zwischen f_t und der x-Achse liegt und vom Ursprung bis zum Wendepunkt im 1. Quadranten reicht, nicht von t abhängt.
- Für welches t hat im Intervall $[0;1]$ das Flächenstück, das von der Kurve und der x-Achse begrenzt ist, den Wert 1?

[**Lösungen:** a) $y = 0$ $N = W_1(0/0)$ $H(t/\frac{1}{2t})$ $T(-1/-\frac{1}{2t})$ $W_{23}(\pm t \cdot \sqrt{3} / \pm \frac{\sqrt{3}}{4t})$ c) $A = \ln 2$ d) $t = 0,3956$]

2. Die Gleichung einer Hyperbel lautet $13x^2 - 3y^2 = 39$.

Eine zur y-Achse parallele Sehne geht durch den Brennpunkt. Das so entstandene Segment rotiert um die x-Achse. Diesem Hyperboloid ist ein Zylinder mit größtem Volumen eingeschrieben. Das Hyperboloid erhält eine Durchbohrung von kreisförmigem Querschnitt, wobei der Radius der Durchbohrung gleich dem Radius des Zylinders ist. Bestimmen Sie die Volumina des Zylinders und des ringförmigen Restkörpers.

[**Lösungen:** $F(4/0)$ $V_Z = 26\pi$ $V_{\text{Rest}} = \frac{130}{9}\pi$]

3. Die Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene $\varepsilon_1: 3x - 2y - 2z + 1 = 0$ liegt, berührt die Ebene $\varepsilon_2: [A(24/7/2), B(9/8/5), C(4/-2/6)]$ im Punkt $T(x_1/4/6)$.

- Ermitteln Sie die Gleichung dieser Kugel.
- Die xy-Ebene schneidet aus der Kugel einen Kreis heraus. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M_1 und den Radius r_1 dieses Kreises sowie die Kreisgleichung.

[**Lösungen:** a) $T(4/4/6)$ $K: (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 26$ b) $k: (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$]

4. Eine Fluggesellschaft bietet mit einem Airbus (300 Sitzplätze) Linienflüge zwischen London und New York an. Erfahrungsgemäß wird ein gebuchter Platz nur mit Wahrscheinlichkeit 0,8 tatsächlich belegt.

- In welchem Bereich liegt mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze bei einem ausgebuchten Flug?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einem ausgebuchten Flug mindestens 250 Plätze belegt werden?
- Infolge der Treibstoffverteuerung ist die Fluggesellschaft zur besseren Auslastung der Flugzeuge dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen. Wie viele Buchungen darf sie annehmen, wenn das Risiko, mindestens einen Passagier mit einem gebuchten Platz abweisen zu müssen, höchstens 0,001 betragen soll?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß bei einer 20%-igen Überbuchung eines Fluges (d.h. 360 Plätze verkauft) nicht alle erscheinenden Fluggäste transportiert werden können?

[**Lösungen:** a) [226;254] b) 0,085 c) 346,85 d) 0,049]

1. Der Graph der Funktion $f(x) = \frac{ax}{x^2 + b}$ verläuft durch $P(4/\frac{4}{3})$. Seine Steigung in $Q(0/y)$ ist -1.
- Ermittle die Gleichung der Funktion.
 - Diskutiere die Funktion (Definitions- und Wertebereiche, Asymptoten, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Wendetangenten, Graph im Intervall $[-7;7]$).
 - Berechne das Maß der Fläche, die der Graph von f , die Geraden $g_1: x = 3$ und $g_2: x = 5$ sowie die x -Achse begrenzen.

[**Lösungen:** a) $f(x) = \frac{4x}{x^2 - 4}$ b) $a_{12}: x = \pm 2$ $a_3: y = 0$ $N = W(0/0)$ $t_w: y = -x$ keine Extrema c) $A = 2,870$]

2. Der Kreis $x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$ hat mit der Parabel $x^2 = 2py + d$, deren Scheitel im Mittelpunkt des Kreises liegt, die Sehne auf der Geraden $y = 1$ gemeinsam.
- Berechne den Mittelpunkt und den Radius des Kreises und dann die Gleichung der Parabel.
 - Berechne die Schnittpunkte und den Schnittwinkel des Kreises mit der Parabel.
 - Kreis und Parabel rotieren um die y -Achse. Wie groß ist das Volumen des Körpers, der von Kreis und Parabel eingeschlossen wird?

[**Lösungen:** a) $M(0/2)$ $r = 5$ $p: x^2 = 22y + 2$ b) $S_{12}(\pm 2 \cdot \sqrt{6}/1)$ $\varphi = 54,457^\circ$ c) $V_y = 71\pi$]

3. $M(6/5/2)$ ist der Mittelpunkt einer Kugel, die Gerade $t: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist Tangente.
- Bestimme die Gleichung der Kugel und den Berührungspunkt der Tangente.
 - Die Kugel wird von der Ebene $\varepsilon_1: 2x + 3y - 6z = -20$ geschnitten. Bestimme den Mittelpunkt und den Radius des Schnittkreises.
 - Berechne den Winkel zwischen den Ebenen ε_1 und $\varepsilon_2: 3x - 2y = 8$.

[**Lösungen:** a) $(x-6)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 49$ $T(4/2/8)$ b) $M(\frac{32}{7} / \frac{20}{7} / \frac{44}{7})$ $r = 2 \cdot \sqrt{6}$ c) 90°]

4. An einem Lotteriestand werden Rubbelkarten angeboten. Von den 16 Feldern einer Karte tragen drei eine 1, drei eine 2 und vier eine 3. Die restlichen Felder sind Leerfelder. Folgende Skizze zeigt ein Beispiel:

1		2	1
3	2	3	3
2		3	
	1		

- 2 Felder werden freigerubbelt; berechne die Wahrscheinlichkeit für A: beide Felder enthalten dieselbe Zahl und B: die beiden Felder enthalten mindestens ein Leerfeld.
- Eine Rubbelkarte kostet 2 DM. Rubbelt der Käufer zwei 3er-Felder auf, so erhält er 20 DM ausbezahlt, bei zwei 2er-Feldern erhält er 2 DM und bei zwei 1er-Feldern 1 DM. In allen anderen Fällen hat er keinen Gewinn. Die Zufallsvariable X beschreibe den Gewinn des Käufers in DM. Bestimme den Erwartungswert von X . Ist das Spiel fair?
- Es liegt ein Hauptgewinn vor, wenn man zwei 3er-Felder aufrubbelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, beim Kauf von 60 Rubbelkarten mehr als zwei Hauptgewinne zu erhalten?
- Wie viele Rubbelkarten muß der Käufer mindestens erwerben, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens einen Hauptgewinn zu erhalten?

[**Lösungen:** a) A: 0,1 B: 0,625 b) -0,925 (nicht fair) c) 0,583 d) 90]

1. Die Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide liegt in der Ebene $\varepsilon: 9x - 2y + 6z = 13$. Die Gleichungen der Trägergeraden zweier Seitenkanten lauten

$$g: X = \begin{pmatrix} -8 \\ 9 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } h: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ -15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

Die dritte Kante steht auf die Basisebene normal.

- a) Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte A, B, C und der Spitze S?
b) Wie groß ist das Volumen der Pyramide?

[Lösungen: a) S(10/-1/7) A(1/4/2) B(5/4/-4) C(1(1/1) b) $V = \frac{121}{3}$]

2. Ein Grundstück hat die Form eines allgemeinen Vierecks mit folgenden Abmessungen: $a = 634$ m, $b = 620$ m, $d = 153$ m, $\alpha = 87,3^\circ$ und $\beta = 115,6^\circ$.

- a) Berechne die Länge der Umzäunung und die fehlenden Winkel.
b) Nach einer Erbschaft soll das Grundstück durch eine durch A gehende geradlinige Grenze in zwei flächengleiche Teile getrennt werden. Diese Gerade schneidet die Seite b in X. Wie weit liegt X von B entfernt?
c) Berechne, welcher Teil den längeren Zaun benötigt.

[Lösungen: a) $U = 2\,389,7$ m $\gamma = 40^\circ$ $\delta = 117,1^\circ$ b) 427 m c) $U_{ABX} = 1\,965,6$ m $U_{AXCD} = 2\,233,3$ m]

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \ln^2 x$. Diskutiere die Funktion (Definitionsbereich, Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte). Zeichne ihren kartesischen Graphen in $[0,5;5]$ und berechne die Fläche, die von der Funktion, der x-Achse und der Geraden $g: x = e$ eingeschlossen wird.

[Lösungen: $N = T(1/0)$ $W(e/1)$ $A = 0,718$]

4. Eine Maschine stellt Platten her, deren Stärke naturgemäß schwankt. Die Plattenstärke ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 10$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0,02$ mm. Wieviel Prozent Ausschuß ist zu erwarten, wenn

- a) die Platten mindestens 9,95 mm stark sein sollen?
b) die Platten höchstens 10,02 mm stark sein dürfen?
c) die Plattenstärke zwischen 9,97 mm und 10,03 mm liegen muß?
d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Stärke einer zufällig herausgegriffenen Platte höchstens um $\varepsilon = 0,04$ mm vom Erwartungswert μ abweicht?

[Lösungen: a) 0,006 b) 0,159 c) 0,134 d) 0,955]

1. Gegeben sind ein Punkt $P(5/1/-2)$, eine Gerade $g: X = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und eine Ebene

$$\varepsilon: 2x + y + 2z = -6.$$

- a) Welchen Abstand hat P von ε ? Unter welchem Winkel schneidet g die Ebene ε ?
Ermittle eine Koordinatengleichung der Ebene ε_1 , die g enthält und auf ε normal steht.
b) Der Schnittpunkt der gegebenen Ebene ε mit der z-Achse sei B. Bestimme den Mittelpunkt

und den Radius des Schnittkreises von ε mit der Kugel K: $\left[X - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right]^2 = 9.$

Zeige, daß B auf dem Schnittkreis liegt. Auf dem Kreis liegen die Berührungspunkte aller Tangenten, die man von einem Punkt R an die Kugel K legen kann. Berechne die Koordinaten von R.

- c) Bestimme den kürzesten Abstand der beiden Geraden g und h: $[P, Q(1/-1/2)]$.

[Lösungen: a) $d = \frac{13}{3}$ $\varphi = 26,4^\circ$ $\varepsilon_1: 5x + 2y - 6z = 39$ b) $B(0/0/-3)$ $M(-\frac{20}{9}/\frac{8}{9}/-\frac{11}{9})$ $r = \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{3}$ $R(-20/-8/-19)$ c) 6]

- 2a) Über einer Ebene schwebt in 1 450 m Höhe ein Ballon. Von ihm aus werden 2 Orte A und B unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 11,25^\circ$ und $\beta = 14,4^\circ$ anvisiert. Die beiden Visierlinien schließen miteinander den Winkel $\gamma = 115,6^\circ$ ein. Berechne die Entfernung AB und den Winkel, den die Vertikalebene durch den Ballon und die Orte A bzw. B miteinander einschließen.

- 2b) Bestimme mit Hilfe des Newtonschen Näherungsverfahrens die Nullstelle $(x/0)$ der Funktion $f: y = \tan x + x - 1$ in $[0; 0,5\pi]$ so genau, daß $f(x) = 0,000$ ist.

[Lösungen: a) $d = 11\,255,5$ m $\varepsilon = 120,39^\circ$ b) $x = 0,4799$ rad $= 27,5^\circ$]

- 3a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2}$.

Diskutiere die Funktion $f(x)$, indem Du sie auf Definitionsbereich, Asymptoten, Nullstellen, Symmetrieverhalten und Extrema hin untersuchst und zeichne ihren Graphen in $[-4; 4]$. Bestimme ferner die Fläche, die $f(x)$ mit der y-Achse zwischen $y_1 = 0$ und $y_2 = 3$ einschließt.

- 3b) Diese Kurve, die Gerade $y = 3$ und der längere Bogen des Kreises $k: x^2 + (y+2)^2 = 8$ schließen ein gemeinsames Flächenstück ein. Berechne die gemeinsame Fläche.

- 3c) Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn die Fläche aus b) um die y-Achse rotiert.

[Lösungen: a) $a_1: x = 0$ $a_2: y = -1$ $N_{12}(\pm 2/0)$ keine Extrema $A = 8$ b) $A = 6 \cdot (\pi + 2)$ c) $V_y = 106,699$]

- 4a) Ein Kaufhaus verkauft bedruckte Hemden in den Farben rot, blau und grün mit den Wahrscheinlichkeiten 0,4 / 0,3 / 0,3. Es werden nacheinander 5 Hemden verkauft.

a1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, daß davon mindestens 3 blau sind?

a2) Wie groß ist P, daß höchstens 2 Hemden grün sind?

- 4b) Eine Fluggesellschaft bietet mit einem Airbus (300 Sitzplätze) Linienflüge zwischen Wien und New York an. Erfahrungsgemäß wird ein gebuchter Platz nur mit der Wahrscheinlichkeit 0,8 belegt.
- b1) In welchem Bereich liegt mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze bei einem ausgebuchten Flug?
- b2) Infolge der Treibstoffverteuerung ist die Fluggesellschaft zur besseren Auslastung dazu übergegangen, die Flüge überbuchen zu lassen. Wie viele Buchungen darf sie annehmen, wenn das Risiko, mindestens einen Passagier mit einem gebuchten Platz abweisen zu müssen, höchstens 0,001 betragen soll?

[**Lösungen:** a1) 0,163 a2) 0,837 b1) [226;254] b2) 346]

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x+4) \cdot e^{-\frac{x}{4}}$.
- Bestimmen Sie den Definitionsbereich und untersuchen Sie diese Funktion auf Nullstellen, Extremstellen, Art der Extrema und Wendepunkte. Zeichnen Sie den Funktionsgraphen im Intervall $[-5;5]$. Wie lautet die Gleichung der Wendetangente und welchen Winkel schließt sie mit der x-Achse ein?
 - Eine Parabel 2. Ordnung geht durch den Punkt $P(2/0)$ und hat mit f den Hochpunkt gemeinsam. Wie lautet die Funktionsgleichung?
 - Berechnen Sie die Größe der Fläche zwischen den beiden Kurven und der x-Achse im 2. Quadranten.

[**Lösungen:** N(-4/0) H(0/4) W(4/2,943) $t_W: y = -\frac{1}{e} \cdot x + \frac{12}{e}$ $\alpha = 159,8^\circ$ b) $f(x) = -x^2 + 4$ c) $A = 6,16$]

2. Gegeben ist die Hyperbel $x^2 - 4y^2 = 80$.
- Beweisen Sie, daß die Tangente im Punkt $P(12/y > 0)$ eine Winkelsymmetrale der beiden Geraden PF_1 und PF_2 ist.
 - Das Flächenstück, das von der x-Achse, der Tangente im Punkt P und vom rechten Hyperbelrand begrenzt wird, rotiert um die x-Achse. Berechnen Sie das Volumen des entstehenden Drehkörpers.
 - Dem durch die Drehung der Hyperbel um ihre Hauptachse entstehenden Drehhyperboloid ist der Drehkegel mit dem größten Volumen eingeschrieben, der seine Spitze im Punkt $S(28/0)$ hat und dessen Grundfläche zwischen dem rechten Hyperbelscheitel und dem Punkt S liegt. Wie groß ist das Volumen V?

[**Lösungen:** a) $P(12/4)$ $t_P: 3x - 4y = 20$ b) $V_x = 16,29$ c) $V_{\max} = \frac{640}{3} \pi$]

3. Zwei Ebenen $\varepsilon_1: [A(1/-2/0), B(3/3/6), C(-1/0/1)]$ und $\varepsilon_2: x + y + z = -4$ liegen vor.
- Unter welchem Winkel schneiden sich die beiden Ebenen?
 - Ermitteln Sie die Gleichung der Kugel mit dem Mittelpunkt $M(2/1/2)$, die die Schnittgerade s der beiden gegebenen Ebenen als Tangente hat.
 - Spiegeln Sie den Punkt $P(2/2/0)$ an der Ebene ε_1 ($\rightarrow P'$) und berechnen Sie den kürzesten Abstand der beiden windschiefen Geraden s und g: $[P', Q(-2/0/5)]$.

[**Lösungen:** a) $101,1^\circ$ b) $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 27$ c) $P'(0/-2/4)$ $d = 3$]

4. Die Polizei führt Alkoholkontrollen durch, bei denen im Mittel 15 von 100 Lenkern alkoholisiert sind.
- Wie viele Lenker müssen aufgehalten werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens ein alkoholisierte Lenker erfaßt wird?
 - An einem Abend werden 30 Lenker überprüft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß weniger als 3 alkoholisiert sind?
 - Im Monat sollen 2 400 Lenker kontrolliert werden. Bestimmen Sie den Parameter μ der approximierten Normalverteilung. In welchem Bereich liegt mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der alkoholisierten Lenker?
 - Der Alkotest verläuft bei 95% der alkoholisierten Lenker positiv (d.h. sie werden als alkoholisiert erkannt). In 2,5% aller nicht alkoholisierten Lenker verläuft er positiv und liefert somit ein Fehlresultat. Der Test bei Herrn B zeigt ein positives Ergebnis. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er alkoholisiert?
 - Im Anschluß an eine groß angelegte Aufklärungskampagne des Kuratoriums für Verkehrssicherheit will man überprüfen, ob es gelungen ist, den Anteil der alkoholisierten Autofahrer zu senken. Bestimmen Sie den Mindestumfang der Stichprobe, die es gestattet, den neuen Anteil der alkoholisierten Lenker mit 95%-iger Sicherheit auf $\pm 0,02$ genau zu schätzen.

[**Lösungen:** a) 29 b) 0,151 c) $325 \leq X \leq 395$ d) 0,873 e) 2 401]

1. In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Geraden $g[A(-1/1/1), \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}]$ und

$h[B(0/3/3), C(2/2/5)]$ gegeben.

- Beweise, daß die Geraden g und h eindeutig eine Ebene ε bestimmen.
- Ermittle eine allgemeine Gleichung dieser Ebene.
- Begründe, daß das Viereck $ABCD$ mit $D(1/0/3)$ eine Raute ist und berechne ihren Flächeninhalt.
- Vom Punkt $S(11/5/4)$ wird das Lot auf die Ebene ε gefällt, es trifft ε im Punkt F . Berechne die Koordinaten von F .
- Berechne das Volumen der Pyramide $ABCD S$.

[**Lösungen:** a) $g \parallel h$ b) $6x + 2y - 5z = -9$ c) $A = \sqrt{65}$ d) $F(5/3/9)$ e) $V = \frac{65}{3}$]

2. Gegeben ist die reelle Funktion $f: y = (x - 3) \cdot e^{\frac{x}{3}}$.

- Berechne den Extrempunkt und den Wendepunkt, weise Monotonie und Krümmung nach und zeichne den Funktionsgraphen im Intervall $[-4;4]$.
- Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das vom Funktionsgraphen und den beiden Koordinatenachsen begrenzt wird.
- Beantworte allgemein: welche notwendigen und hinreichenden Bedingungen müssen für lokale Extremstellen und Wendepunkte erfüllt sein?

[**Lösungen:** a) $T(0/-3)$ $W(-3/-2,207)$ b) $A = 6,465$]

3. Das Kohlenstoffisotop C_{14} ist radioaktiv mit der Halbwertszeit 5 760 Jahre. Es kommt in der Atmosphäre sowie in lebenden Organismen vor. Stirbt ein organischer Stoff, so verringert sich der C_{14} -Anteil ständig nach dem radioaktiven Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$.

- Zeige, daß für die Halbwertszeit τ und die Zerfallskonstante λ die Beziehung $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ gilt und stelle das Zerfallsgesetz für das Kohlenstoffisotop C_{14} auf, welches bei der Altersbestimmung eine wichtige Rolle spielt.
- Bestimme das Alter eines Tierskeletts, welches heute noch 27% des ursprünglichen Gehaltes an C_{14} aufweist.
- Wieviel Prozent beträgt der C_{14} -Anteil nach 5 000 Jahren?
- Ab welchem Alter von Fundgegenständen liefert die C_{14} -Methode keine genauen Ergebnisse mehr, wenn 1% des ursprünglichen C_{14} -Anteils noch hinreichend genau nachgewiesen werden kann?
- Zeichne den Zerfallsvorgang für $0 \leq t \leq 3\tau$ und die Ausgangsmenge $m_0 = 10$ g.

[**Lösungen:** a) $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,000120338t}$ b) 10 880,5 Jahre c) 0,548 d) 38 269 Jahre]

4. In einer Stadt sind 8% der U-Bahnfahrergäste „Schwarzfahrer“.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich in einem U-Bahnwaggon mit 60 Fahrgästen
 - genau 1 Schwarzfahrer bzw.
 - mindestens 2 Schwarzfahrer befinden?
- Unter wie vielen Fahrgästen ist mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mindestens 1 Schwarzfahrer zu erwarten?

- c) Ein Kontrollor überprüft täglich etwa 300 Fahrgäste. Wie viele Schwarzfahrer wird er täglich durchschnittlich zur Rechenschaft ziehen? In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% die Anzahl jener Schwarzfahrer, die er an einem Tag ertappt?
- d) Begründe, unter welchen Voraussetzungen die Binomialverteilung durch die Normalverteilung approximiert werden kann (Laplace-Bedingung).

[**Lösungen:** a) 0,035 0,958 b) 56 c) 24 [15;33] d) $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 9$]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Mössingerstraße 25
Mag. Reinhard Lanner

1. Der Graph der Funktion $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ verläuft durch die Punkte $A(1/\frac{1}{2})$, $B(2/\frac{8}{3})$ und $C(3/\frac{9}{2})$.

An der Stelle $x = 0$ hat der Graph einen Wendepunkt mit einer zur x-Achse parallelen Tangente.

- Bestimme die Funktion $f(x)$ und begründe den Ansatz der einzelnen Gleichungen.
- Bestimme Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte und Wendetangenten dieser Funktion.
- Stelle die Funktion samt beiden Wendetangenten im Intervall $[-2;4]$ grafisch dar.

[**Lösungen:** $f(x) = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{3}x^3$ $N_1 = W_1 (0/0)$ $t_1: y = 0$ $N_2 (4/0)$ $H(3/\frac{9}{2})$ $W_2 (2/\frac{8}{3})$ $t_2: y = \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}$]

- 2a) Leite die Gleichung einer Ellipse aus ihrer Brennpunktsdefinition her.

- 2b) Das von den Graphen von $e: 3x^2 + 4y^2 = 300$ und $h: 16x^2 - 9y^2 = 144$ eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse (Einheit = cm). Bestimme das Volumen und die Masse der dabei entstehenden asymmetrischen Linse ($\rho = 2,67 \text{ g/cm}^3$).

[**Lösungen:** $V = 168\pi$ $m = 1,41 \text{ kg}$]

3. Von einem 1 450 m über einer Ebene schwebenden Ballon sieht man die Orte A und B unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 11^\circ 15'$ und $\beta = 14^\circ 24'$. Die vom Ballon ausgehenden Sehstrahlen nach den Orten A und B bilden den Winkel $\gamma = 115^\circ 36'$.

- Wie weit sind die beiden Orte voneinander entfernt?
- Welchen Winkel schließen die vom Ballon zu den beiden Orten weisenden Himmelsrichtungen ein?

[**Lösungen:** $AB = 11\,255,5 \text{ m}$ $\varphi = 120,39^\circ$]

4. Zeichne die Graphen der Kurve $k: 4y^2 = x^3$ und der Geraden $g: x = 4$.

- Der gemeinsamen Fläche ist das größtmögliche Rechteck einzuschreiben. Wie groß ist dessen Flächeninhalt?
- Dem bei Rotation der gemeinsamen Fläche um die x-Achse entstehenden Drehkörper ist ein Zylinder größten Volumens einzuschreiben. Bestimme dieses Volumen.

[**Lösungen:** a) $x = \frac{12}{5}$ $y = \frac{12}{5} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$ $A_{\max} = 5,949$ b) $x = 3$ $y = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}$ $V_{\max} = \frac{27}{4} \pi$]

1. Die Kugel, deren Mittelpunkt in der Ebene $\varepsilon_1: 3x - 2y - 2z = 0$ liegt, berührt die Ebene $\varepsilon_2: [A(24/7/2), B(9/8/5), C(4/-2/6)]$ im Punkt $T(x_1/4/6)$.
- a) Ermitteln Sie die Gleichung dieser Kugel.
- b) Die xy -Ebene schneidet aus der Kugel einen Kreis heraus. Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunktes M_1 und den Radius r_1 dieses Kreises sowie die Kreisgleichung.

[**Lösungen:** $\varepsilon_2: x + 5z = 34$ $T(4/4/6)$ a) $(x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-1)^2 = 26$ b) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$]

2. Der Horizontalabstand zweier verschieden hoher Sesselliftstützen beträgt 100 m, der Niveauunterschied ihrer Fußpunkte im Gelände beträgt 20 m. Die tiefere Stütze A ist 13 m hoch. Das Tragseil beschreibt durch die Belastung eine Kurve 2. Grades, deren tiefster Punkt in 20 m horizontaler Entfernung 1 m tiefer liegt als die Spitze von A.
- a) Berechnen Sie die Gleichung der Kurve sowie die Höhe der zweiten Stütze.
- b) In welchem Punkt der Kurve ist der Anstieg des Seiles gleich der Steigung zwischen den Mastspitzen?
- c) Ermitteln Sie jenen Punkt der Kurve, der in lotrechter Richtung den geringsten Abstand vom Boden hat, wenn das Gelände zwischen den beiden Stützen gleichmäßig steigt.

[**Lösungen:** a) $y = \frac{1}{400}x^2 - \frac{1}{10}x + 13$ $h_B = 8$ m b) $X(50/\frac{57}{4})$ c) $Y(60/16)$]

3. Gegeben sind die beiden Kurven $k_1: y = 1 + \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) und $k_2: y = \sqrt{\frac{16}{9} - x}$ ($0 \leq x \leq \frac{16}{9}$)

sowie $\rho_{\text{Glas}} = 2,5$.

- a) Fertigen Sie eine Skizze der beiden Kurven an.
- b) Wie schwer ist ein hohler Glaskörper, der durch Drehung der beiden Kurven um die x -Achse entsteht?
- c) Berechnen Sie die Schnittfläche, die bei einem Achsialschnitt dieses Glaskörpers entsteht.

[**Lösungen:** b) $m = 24,599$ c) $A = 3,12$]

4. Die Dicke der auf einer Maschine M_1 hergestellten Metallplatten ist erfahrungsgemäß normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 7,5$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0,27$ mm.
- a) Platten mit einer Dicke von weniger als 7,1 mm gelten als Ausschuß. Wieviel Prozent Ausschuß sind zu erwarten? Wie ist die Toleranzgrenze zu wählen, damit man höchstens 2,5% Ausschuß erhält?
- b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Dicke einer Platte um weniger als 0,3 mm vom Erwartungswert abweicht?
- c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben 12 Platten, die zufällig der Produktion entnommen werden, eine Gesamtdicke von höchstens 92,5 mm?
- d) Nun wird eine zweite, genauer arbeitende Maschine M_2 aufgestellt, die bei gleichem Erwartungswert eine Standardabweichung von nur $\sigma = 0,17$ mm aufweist. Diese zweite Maschine wird für 70% aller Arbeiten eingesetzt. Aus der Produktion wird zufällig eine Platte entnommen und eine Dicke von weniger als 7,1 mm festgestellt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese Platte aus der Maschine M_2 stammt?

[**Lösungen:** a) 0,069 Toleranz: 6,97 mm b) 0,733 c) 0,996 d) 0,24]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Völkermarkter Ring 27
Mag. Gudrun Amberger

1. Gegeben sind die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 64$ und die Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$. Der linke Hyperbelast teilt die Ellipse in 2 Flächen.
- Die kleinere Fläche rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.
 - In die größere Ellipsenfläche ist ein gleichschenkeliges Dreieck so einzuschreiben, daß bei Rotation um die x-Achse ein Drehkegel mit maximalem Volumen entsteht. Die Spitze des Dreiecks liegt im linken Hauptscheitel der Hyperbel. Berechne Volumen und Oberfläche dieses Drehkegels.

[**Lösungen:** a) $V_x = \frac{112}{3} \pi$ b) $r = 2 \cdot \sqrt{3}$ $h = 6$ $V_{\max} = 24\pi$ $O = 36\pi$]

2. Zwischen 2 Orten A und B soll eine geradlinige Eisenbahnlinie gebaut werden, die zwischen 2 Punkten M und N durch einen Tunnel führt. Zur Bestimmung der Tunnellänge werden von einem außerhalb der Verbindungsstrecke liegenden Vermessungspunkt C die angegebenen Daten gemessen. Alle Punkte liegen in einer Ebene. Wie lang wird der Tunnel?

CB = a = 6 410 m, CA = b = 5 750 m, ACB = $\gamma = 98^\circ 15'$, ACM = $\epsilon = 25^\circ 3'$, BCN = $\delta = 26^\circ 30'$.

[**Lösungen:** 3 426 m]

3. Ein langstieliges Weinglas hat die Form eines Rotationskörpers (Maße in cm). Der Außenquerschnitt des Glases ohne Standfläche wird begrenzt durch die Geraden $y = 9,5$ und $y = -9,5$, durch die Parabel $y = x^2 - 0,3$ und durch den Graphen der Funktion $f(x) = a - \frac{b}{x^2}$. Der Querschnitt des Glashohlraumes wird begrenzt durch die Gerade $y = 9,5$ und durch die Parabel $y = x^2$. Der Glasstiel ruht auf einer zylindrischen Standfläche von 6,4 cm Durchmesser und 3 mm Höhe.

- Die Funktion $f(x) = a - \frac{b}{x^2}$ berührt die Parabel $y = x^2 - 0,3$ im Punkt P(1/y). Berechne die Funktionsgleichung von f(x) und stelle den Außenquerschnitt grafisch dar.
- Wieviel Flüssigkeit faßt das bis zur halben Höhe gefüllte Glas? In welchem Abstand vom oberen Rand muß die Markierung für 1/8 Liter angebracht werden?
- Welche Masse hat das leere Weinglas, wenn die Dichte des verwendeten Glases $2,6 \text{ g/cm}^3$ beträgt?

[**Lösungen:** a) $f(x) = 1,7 - \frac{1}{x^2}$ b) $V = 35,441 \text{ cm}^3$ Markierung: 6 mm c) 64,39 g]

4. Von einer reellen Funktion f(x) kennt man $f'(x) = \frac{6}{x}(1 - \ln x)$ und eine Nullstelle $x_1 = e^2$. Zeige, daß $f(x) = 6 \cdot \ln x - 3 \cdot \ln^2 x$ ist. Bestimme Definitionsmenge, Nullpunkte, Extrempunkte, Wendepunkte und zeichne den Graphen im Intervall $[\frac{1}{e}; 10]$. Zeige, daß der Flächeninhalt unterhalb der Kurve im 1. Quadranten ganzzahlig ist.

[**Lösungen:** $N_1 (1/0)$ $N_2 = W(e^2/0)$ $H(e/3)$ $A = 12$]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Völkermarkter Ring 27
Mag. Thomas Goritschnig

1. Gegeben sind die zwei Parabeln $p_1: y^2 = 3x$ und $p_2: y^2 = 40 - 5x$. Sie begrenzen im 1. Quadranten zusammen mit der x-Achse die Fläche A.
- Fertige eine Zeichnung an und berechne den Inhalt der Fläche A.
 - Die Fläche A rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Drehkörpers.
 - Welches der Fläche A eingeschriebene Rechteck erzeugt bei Drehung um die x-Achse den volumsgrößten Zylinder? Berechne das Volumen dieses Zylinders.

[Lösungen: a) $A = \frac{16 \cdot \sqrt{15}}{3}$ b) $V_x = 60\pi$ c) $r = \sqrt{7,5}$ $h = 4$ $V_{\max} = 30\pi$]

- 2a) Bestimme Mittelpunkt, Radius und Gleichung jener Kugel k, die durch die Punkte A(1/-7/7) und

B(9/-3/-17) geht und deren Mittelpunkt auf der Geraden $g: X = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ liegt.

- 2b) Berechne die Durchstoßpunkte D_1 und D_2 der Geraden $h: X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit der Kugel k

sowie den Winkel, den die Tangentialebenen in D_1 und D_2 einschließen.

- 2c) Beweise mit Hilfe der Integralrechnung die Volumensformel der Kugel.

[Lösungen: a) $M(-10/1/-9)$ $r = 21$ b) $D_1 (-5/-3/11)$ $D_2 (3/5/7)$ $\varphi = 33,2^\circ$]

3. Ein Eignungstest enthält 300 Fragen. Zu jeder dieser Fragen sind 3 Antworten gegeben, von denen jeweils nur eine richtig ist. Es wird angenommen, daß ein Kandidat die Antwort auf gut Glück rät, also eine zufällige Auswahl trifft.

- Man betrachte zuerst nur die ersten 5 Fragen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Kandidat davon mehr richtig als falsch beantwortet?
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden von allen 300 Fragen mindestens 120 richtig beantwortet?
- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß von allen Fragen mindestens 75 und höchstens 90 richtig beantwortet werden?
- In welchem Bereich $[\mu - a < X < \mu + a]$ liegt die Anzahl der Fragen, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 75% richtig beantwortet werden?

[Lösungen: a) 0,21 b) 0,007 c) 0,108 d) $91 < X < 109$]

4. Ein ebenes Grundstück hat die Gestalt eines Vierecks ABCD mit folgenden Maßen: $AB = a = 436,4$ m, $BC = b = 861,4$ m, $AD = d = 302,8$ m, $\angle ABC = \beta = 122,19^\circ$, $\angle ADB = \delta_1 = 33,77^\circ$.

- Berechne den Flächeninhalt des Grundstücks.
- Vom Mittelpunkt E der Seite d soll durch eine gerade Linie ein 6 ha großer Teil des Grundstücks abgetrennt werden. Der Endpunkt X dieser Linie soll auf DC liegen. Wie weit ist X von C entfernt?

[Lösungen: a) $A = 333\,042,1 \text{ m}^2$ b) $CX = 361,25 \text{ m}$]

9020 Klagenfurt, BG/BRG Völkermarkter Ring 27
Mag. Claudia Grimm

1a) Von einem Quadrat im $\mathbb{R}^2$ kennt man den Mittelpunkt $M(2/2)$ und die Trägergerade

$$g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ der Seite AB.}$$

Berechne die Koordinaten der Eckpunkte des Quadrats.

1b) Von einem Quadrat im $\mathbb{R}^3$ sei nun ebenfalls der Mittelpunkt $M(2/-3/5)$ und die Trägergerade g der

$$\text{Seite AB gegeben: } X = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Berechne die Eckpunkte des Quadrats und erkläre den Unterschied zur Berechnung im $\mathbb{R}^2$.

1c) Errichte über dem Quadrat aus b) eine gerade Pyramide mit der Höhe $h = 6$ und gib die Koordinaten der Spitze S an (2 Lösungen).

Zeige: das Volumen dieser Pyramide beträgt 144 Volumseinheiten und der Abstand der Pyramidengrundfläche vom Koordinatenursprung beträgt 1 Längeneinheit.

[**Lösungen:** a) $A(-2/0)$ $B(4/-2)$ $C(6/4)$ $D(0/6)$ b) $A(6/-5/1)$ $B(4/-7/9)$ $C(-2/-1/9)$ $D(0/1/1)$ c) $S_1(6/1/7)$ $S_2(-2/-7/3)$]

2. Der Graph einer reellen Funktion enthält den Punkt $N(1/0)$, die erste Ableitung der Funktion lautet

$$f'(x) = \frac{3}{8} \cdot (x^2 - 10x + 21).$$

a) Ermittle die Funktionsgleichung von f , diskutiere diese Funktion und zeichne ihren Graphen im Intervall $[0,5;9]$.

b) Der Punkt N , der Hochpunkt und der Wendepunkt von f bilden ein gleichschenkeliges Dreieck. Wieviel Prozent des Inhalts der vom Graphen und der x -Achse begrenzten Fläche entfallen auf dieses Dreieck?

c) Durch N und den Hochpunkt von f verläuft weiters eine Funktion $g(x) = \frac{ax^2 - b}{x^2 - c}$, die an der Stelle $x = 2$ einen Pol besitzt. Bestimme die Koeffizienten von g und untersuche g bezüglich Asymptoten und Punkte mit waagrechter Tangente.

$$\text{[**Lösungen:** a) } f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^3 - 15x^2 + 63x - 49) \quad N_1(1/0) \quad N_2 = T(7/0) \quad H(3/4) \quad W(5/2) \quad \text{b) } 44,4\% \quad \text{c) } g(x) = \frac{5}{2} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

$$a_{12}: x = \pm 2 \quad a_3: y = \frac{5}{2} \quad H(0/\frac{5}{8})]$$

3. Gegeben ist der Punkt $P(6/3)$.

a) Durch P ist eine Gerade so zu legen, daß sie mit den positiven Koordinatenachsen ein Dreieck von kleinstem Inhalt einschließt. Berechne diesen Flächeninhalt.

b) P ist zugleich Schnittpunkt der Ellipse $3x^2 + 4y^2 = 144$ mit der Hyperbel $x^2 - 3y^2 = 9$. Berechne den Schnittwinkel der beiden Kegelschnitte.

c) Schreibe dem Ellipsoid, das durch Rotation der Ellipse aus b) um die x -Achse entsteht, den volumsgrößen coaxialen Drehzylinder ein. Berechne sein Volumen.

d) Das von der Hyperbeltangente in P , der y -Achse und dem Ellipsenbogen zwischen $B(0/6)$ und P begrenzte Flächenstück rotiert um die y -Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.

$$\text{[**Lösungen:** a) } x = 12 \quad y = 6 \quad A_{\min} = 36 \quad \text{b) } \varphi = 90^\circ \quad \text{c) } r = 2 \cdot \sqrt{6} \quad h = 8 \quad V_x = 192\pi \quad \text{d) } V_y = 108\pi]$$

4. Ein Ballon X schwebt in $h = 460$ m Höhe über waagrechtem Gelände.

- a) Vom Ballon aus visiert man zwei Orte A und B unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 25,5^\circ$ und $\beta = 31,3^\circ$ an. Die scheinbare Entfernung der beiden Orte, das ist der Winkel AXB, beträgt $\delta = 118,4^\circ$.

Berechne die Entfernung der beiden Orte A und B. Wie groß ist der Winkel ε zwischen den Vertikalebene durch den Ballon und die jeweiligen Orte?

- b) Die Spitze eines Kirchturmes wird vom Ballon aus unter dem Tiefenwinkel $\mu = 27,1^\circ$ gesehen. Nähert man sich - ohne an Höhe zu verlieren - dem Turm um $d = 100$ m, so beträgt der Tiefenwinkel $\sigma = 30,6^\circ$. Wie hoch ist der Kirchturm?

[**Lösungen:** a) $AB = 1680,96$ m $\varepsilon = 155,06^\circ$ b) $h = 80,15$ m]

1. Gegeben sei eine Kugel $k: \left[X - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 25$ und eine Ebene $\varepsilon: 2x - 2y + z = 4$.

Beweise, daß die Ebene die Kugel schneidet und berechne den Mittelpunkt bzw. den Radius des Schnittkreises.

Errichte über dem Schnittkreis einen Kegel mit der Höhe 9. Berechne

- die Koordinaten der Spitze des Kegels,
- die Größe des Öffnungswinkels,
- das Volumen und die Oberfläche des Gesamtkörpers.

[**Lösungen:** Schnittkreis: $M(2/1/2)$ $r = 4$ a) $S(8/-5/5)$ b) $\varphi = 47,92^\circ$ c) $V = 293,33 \pi$ $O = 119,4$]

2. Einem Drehellipsoid, das durch Drehung der Ellipse mit der Gleichung $9x^2 + 25y^2 = 225$ um die y-Achse entsteht, soll ein Drehkegel von größtem Volumen eingeschrieben werden. Die Spitze soll in einem Nebenscheitel der Ellipse liegen. Wie groß ist das Volumen des Kegels und welches (kleinere) Volumen schneidet die Basisfläche des Kegels vom Ellipsoid ab?

[**Lösungen:** $V_{\max} = \frac{800}{27} \pi$ $V_y = \frac{700}{27} \pi$]

3. Diskutiere die Funktion $f: x \rightarrow \frac{2x^3}{3(x^2 - 3)}$ im Intervall $[-6;6]$ und zeichne ihren Graphen.

[**Lösungen:** $N = W(0/0)$ $t_w: y = 0$ $H(-3/-3)$ $T(3/3)$ $a_{12}: x = \pm \sqrt{3}$ $a_3: y = \frac{2}{3}x$]

4. Von der Spitze des Magdalensberges (Seehöhe 1 059 m) werden zu zwei Orten A und B im Zollfeld (Seehöhe 470 m) die Tiefenwinkel $6^\circ 36'$ bzw. $6^\circ 54'$ gemessen. Die scheinbare Entfernung der beiden Orte, also der Winkel ASB, sei $35^\circ 24'$.

- Wie groß ist die Entfernung der Orte A und B?
- Welcher Winkel wird von den beiden Vertikalebene durch A und B und der Spitze S eingeschlossen?
- Wie groß ist die Fläche des Dreiecks ABF, wobei F der Schnittpunkt des Lotes durch S mit der Zollfeldebene ist?
- Beweise den Cosinussatz anhand einer Skizze.

[**Lösungen:** a) 3 055,94 m b) $35,65^\circ$ c) $A = 7\,220\,425 \text{ m}^2$]

9020 Klagenfurt, BORG Hubertusstraße 1
Mag. Jürgen Benirschke

1. Eine Ellipse in erster Hauptlage mit $a = 5$ geht durch den Punkt $P(3/3)$.
- a) Bestimme die Gleichung der Ellipse.
 - b) Die Ellipse wird in P von einer Hyperbel rechtwinkelig geschnitten. Bestimme die Gleichung der Hyperbel.
 - c) Zeige, daß Ellipse und Hyperbel konfokal sind.
 - d) Ellipse, Hyperbel und x-Achse umschließen im 1. Quadranten ein Flächenstück. Welches Volumen hat der Körper, der bei Rotation dieses Flächenstückes um die x-Achse entsteht?

[Lösungen: a) $9x^2 + 16y^2 = 225$ b) $112x^2 - 63y^2 = 441$ c) $F_{12}(\pm \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4} / 0)$ d) $V_x = 14,01\pi$]

2. Ein Test besteht aus n Fragen mit jeweils 4 möglichen Antworten, von denen je eine richtig ist. Eine Testperson kann nur raten.
- a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden für $n = 30$ genau 5 Fragen richtig beantwortet?
 - b) Für $n = 20$ sind 0, 1, 2, ..., 20 richtige Antworten möglich. Entnimm die zugehörigen Wahrscheinlichkeitswerte aus einer Tabelle und stelle die Verteilung grafisch dar. Bestimme Mittelwert und Standardabweichung für die Verteilung.
 - c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird für $n = 20$ der Test bestanden, wenn 10 richtige Antworten genügen?
 - d) Wie viele Fragen müssen beantwortet werden, damit mit 99%-iger Sicherheit mindestens eine richtige Antwort dabei ist?

[Lösungen: a) 0,105 b) $\bar{x} = \frac{1}{21}$ $\mu = 5$ $\sigma = 1,936$ c) 0,014 d) $n \geq 16,008$]

3. Ein Gefäß entsteht durch Rotation der Parabel $y^2 = a(x - b)$ um die y-Achse in den Grenzen y_1 bis y_2 ($a, b > 0$).
- a) Berechne das Volumen für $a = 8$, $b = 1$, $y_1 = -1$, $y_2 = 4$ und skizziere das Gefäß.
In den folgenden Aufgaben wird jeweils ein Wert gegenüber den Werten aus a) verändert.
 - b) Wie groß wird y_2 , wenn das Volumen auf 50 anwächst? Bestimme y_2 auf 2 Dezimalstellen genau.
 - c) Für welchen Wert von b sinkt das Volumen auf 30? Was bedeutet die Veränderung von b für die Parabel?
 - d) Für welchen Wert von a sinkt das Volumen auf 20? Was bedeutet die Veränderung von a für die Parabel?

[Lösungen: a) $V_y = 13,62\pi$ b) $y_2 = 4,236$ c) $b = 0,708$ d) $a = 35,898$]

4. Ein 500 m breiter Fluß mit der Wassergeschwindigkeit 2 m/s wird mit einem Boot (Eigengeschwindigkeit = 4,5 m/s) überquert. Ein Punkt B liegt am anderen Ufer und 200 m flußaufwärts von A.
- a) Wie viele Grade muß das Boot abweichend von der Richtung AB gesteuert werden, damit es tatsächlich von A nach B gelangt?
 - b) Wie lange dauert die Überquerung?
 - c) Wie viele Meter flußabwärts von B würde es landen, wenn es in A startet und die Achse des Bootes immer die Richtung AB beibehält?

[Lösungen: a) $24,372^\circ$ b) 160,454 s c) 239,341 m]

9020 Klagenfurt, BORG Hubertusstraße 1
Mag. Klaus Breitegger

1. Die Lebensdauer einer Autoreifensorte ist erfahrungsgemäß normalverteilt mit der Standardabweichung $\sigma = 5\,000$ km. Die mittlere Lebensdauer μ eines Reifens beträgt 53 000 km.
 - a) In welchem Bereich liegt die Lebensdauer eines Reifens mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit?
 - b) Bei wieviel Prozent der Reifen übersteigt die Lebensdauer 65 000 km?
 - c) Bei wieviel Prozent der Reifen weicht die Lebensdauer um mehr als 7 000 km von der mittleren Lebensdauer ab?
 - d) Wie groß muß die mittlere Lebensdauer einer Produktserie mindestens sein, damit (bei gleicher Standardabweichung $\sigma = 5\,000$ km) höchstens 2% der Reifen eine Lebensdauer von weniger als 40 000 km haben?

[**Lösungen:** a) 43 200 .. 62 800 km b) 0,82% c) ca. 16% d) $\geq 50\,250$ km]

2. Eine Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Ursprung, hat im Punkt $P(1/\frac{4}{3})$ eine waagrechte Tangente und an der Stelle $x = 2$ einen Wendepunkt. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung, diskutieren Sie die Kurve und zeichnen Sie den Graphen. Berechnen Sie weiters den Flächeninhalt zwischen Kurve und x-Achse.

[**Lösungen:** $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$ $N_1(0/0)$ $N_2(3/0)$ $T(3/0)$ $H(1/\frac{4}{3})$ $W(2/\frac{2}{3})$ $A = \frac{9}{4}$]

3. Eine Firma hat zwei Lagerstätten A und B mit Baumaterial. Im Lager A befinden sich 24 t, im Lager B 18 t. Es sollen 3 Händler I, II, III beliefert werden, und zwar I mit 20 t, II mit 10 t und III mit 12 t. Die Transportkosten (in S pro t) sind folgender Tabelle zu entnehmen:

von - nach	I	II	III
A	220	180	150
B	240	260	250

Die Transportkosten vom Lager B sollen insgesamt S 4 500,- nicht übersteigen. Mit welchen Mengen Baumaterial aus beiden Lagern A und B müssen die einzelnen Händler beliefert werden, damit die Transportkosten minimal sind? Wie hoch sind die minimalen Transportkosten? Lösen Sie die Aufgabe grafisch und rechnerisch.

[**Lösungen:** Lieferplan: $\begin{bmatrix} 2 & 10 & 12 \\ 18 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $K_{\min} = S\,8\,360,-$]

4. Frau N.N. hat zu Jahresbeginn ein Sparbuch eröffnet, dessen Einlagen mit 5,5% p.a. verzinst werden. Wie groß ist ihr Sparguthaben am Ende des 10. Jahres, wenn sie
 - a) zu Beginn jeden Jahres S 24 000,-
 - b) am Ende jeden Jahres S 24 000,-
 - c) zu Beginn jeden Monats S 2 000,-
 - d) am Ende jeden Monats S 2 000,- einlegt?
 - e) Wie groß müßte eine minimale Einlage zum Zeitpunkt der Sparbucheröffnung sein, damit am Ende des 10. Jahres das in a) errechnete Guthaben erreicht wird?
 - f) Lösen Sie Aufgabe a) unter Berücksichtigung von 22% KEST (Kapitalertragssteuer).

[**Lösungen:** a) S 326 003,96 b) S 309 008,49 c) S 318 139,09 d) S 316 722,80 e) S 190 852,69 f) S 304 580,55]

9020 Klagenfurt, BORG Hubertusstraße 1
Mag. Anton Srienzen

1. Die Fläche eines Grundstückes, das in einem Koordinatensystem verortet wurde, soll berechnet werden. Ein Teil dieses Grundstückes wird durch die Kurve $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 2}$ zwischen den Punkten A(2,1/y_A) und B(8/y_B) begrenzt.

- a) Untersuche die Kurve bezüglich Nullstellen, Asymptoten, Extremwerten und Wendepunkten und stelle sie im Intervall [0;9] grafisch dar.
b) Weitere Angaben zum anschließenden Teil dieses Grundstückes sind der Punkt C(10/11), die Länge der Strecke AD = 4,6 LE sowie die Größen der beiden Winkel DAB = 72° und DCB = 73°. Berechne die Fläche des gesamten Grundstückes.

[**Lösungen:** a) A(2,1/8,1) B(8/ $\frac{25}{6}$) a₁: x = 2 a₂: y = x-4 N = T(3/0) H(1/-4) kein Wendepunkt b) A = 40,439]

2. Zwei unendliche Zahlenfolgen sind gegeben durch

$$\langle a_n \rangle = \left\langle \frac{7n+2}{2n+3} \right\rangle \text{ und } \langle b_n \rangle = \left\langle \frac{3}{6}, -\frac{1}{8}, -\frac{5}{10}, -\frac{9}{12}, -\frac{13}{14}, \dots \right\rangle.$$

- a) Bestimme das Bildungsgesetz der Folge $\langle b_n \rangle$.
b) Stelle eine Vermutung über das Monotonieverhalten der Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ an und beweise diese, wobei die einzelnen Beweisschritte detailliert anzugeben sind.
c) Definiere den Begriff „Grenzwert einer Zahlenfolge“, berechne die Grenzwerte der beiden Folgen und führe den Beweis des Grenzwertes für die Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ aus. Gib jenen Index n_0 an, ab dem alle Glieder der Folge $\langle a_n \rangle$ vom Grenzwert einen kleineren Abstand als $\varepsilon = 0,002$ besitzen.

- d) Zeige, daß für die gegebenen Folgen nachstehende Rechenregel gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

[**Lösungen:** a) $\langle b_n \rangle = \left\langle \frac{-4n+3}{2n+6} \right\rangle$ c) a = $\frac{7}{2}$ b = -2 $n_0 = 2\ 124$]

3. Ein zylindrisches, oben offenes Gefäß wird unten von einem Drehkegel abgeschlossen, dessen Höhe $\frac{3}{4}$ des Zylinderradius beträgt. Der Rauminhalt des Gefäßes beträgt 48π VE.

- a) Wie sind seine Maße zu wählen, damit der Materialverbrauch möglichst gering ist?
b) Welche erlaubten Vereinfachungen der Zielfunktion sind Dir bekannt? Begründe auch, warum so vereinfacht werden darf.

[**Lösungen:** r = 4 h = 2 $O_{\min} = 36\pi$]

4. Absolute Genauigkeit ist in den meisten mathematischen Modellen weder möglich noch erforderlich. Über das Maß der vorhandenen Genauigkeit sollte man aber bei allen mathematischen Operationen Bescheid wissen.

- a) Ein Punkt im ebenen Gelände hat in Polarkoordinaten die Angaben $P(520 \pm 1 \text{ m}, 76^\circ \pm 1^\circ)$. Innerhalb welcher Schranken liegen die kartesischen Koordinaten des Punktes?
b) Ein Eiskunstläufer weiß, daß sein „Dreifacher Axel“ in durchschnittlich in 9 von 10 Fällen gelingt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird der Sprung bei den nächsten 100 Versuchen mindestens 95-mal gelingen? Rechne mit der Binomialverteilung und der angenäherten Normalverteilung mit und ohne Stetigkeitskorrektur und vergleiche die erhaltenen Werte.
c) Berechne die Fläche unter der Kurve $y = \ln^2 x$ in den Grenzen von 1 bis 3 durch Ermittlung des bestimmten Integrals und mit der Simpsonschen Näherungsformel für $2n = 4$ Streifen. Wie groß ist der Fehler absolut und relativ?

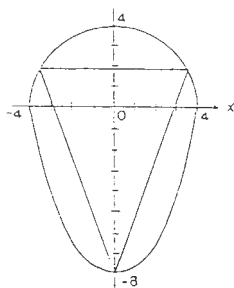
[**Lösungen:** a) $116,75 \leq x \leq 134,845$ $501,316 \leq y \leq 507,647$ b) 0,057 0,066 0,047 c) 1,029 1,031 Fehler: 0,0015 0,14%]

9020 Klagenfurt, BORG Hubertusstraße 1
Mag. Anton Srienzen

- Durch den Wendepunkt des Graphen von $3y = x^3 - 6x^2 + 2x + 15$ und durch die Kurvenpunkte $P_1 (1/y_1)$ und $P_2 (6/y_2)$ geht ein Kreis k .
 - Ermittle die Kreisgleichung und die Gleichung der Polaren p des Ursprungs $O(0/0)$ bezüglich des Kreises k .
 - Berechne den Schnittwinkel der Tangenten von O an k .
 - Berechne den Inhalt jenes dreieckähnlichen Flächenstückes, das vom Kreis k und den beiden Tangenten begrenzt wird.

[**Lösungen:** a) $P_1 (1/4)$ $P_2 (6/9)$ $W(2/1)$ $k: (x-6)^2 + (y-4)^2 = 25$ $p: 6x + 4y = 27$ b) $133,898^\circ$ c) $A = 5,865$]

- Eine Zentrifuge für chemische Versuche besitzt die Form einer Metallkapsel, in die ein kegelförmiges Sieb gestellt werden soll (Achsenschnitt siehe nachstehende Zeichnung).



- Für welche Abmessungen des Siebes wird sein Volumen maximal?
- Berechne das Kegelvolumen und das Volumen der Kapsel, wenn das Sieb entfernt ist.
- Nach Entfernung des Siebes soll die Kapsel mit einer Flüssigkeit vom Volumen $V = 20\pi \text{ cm}^3$ gefüllt werden. Wie hoch steht diese Flüssigkeit im Behälter?

[**Lösungen:** $k: x^2 + y^2 = 16$ $p: y = \frac{1}{2}x^2 - 8$ a) $r = 3,906$ $h = 8,861$ b) $V_{\max} = 45,069\pi$ $V = \frac{320}{3}\pi$ c) $4,472$]

- Von einer geraden Pyramide mit quadratischer Grundfläche kennt man die folgenden Bestimmungsstücke: das Grundflächenquadrat besitzt die Eckpunkte $A(7/2/13)$ und $B(-5/-1/10)$ sowie den Schnittpunkt $F(3/-2/6)$ seiner Diagonalen; die Höhe h der Pyramide beträgt 9 E.
 - Bestimme die Koordinaten aller Eckpunkte der Pyramide und ziehe dabei alle möglichen Lösungen in Betracht.
 - Berechne das Volumen und die Oberfläche der Pyramide.

[**Lösungen:** a) $C(-1/-6/-1)$ $D(11/-3/2)$ $S_1 (4/-10/10)$ $S_2 (2/6/2)$ b) $V = 486$ $O = 723,184$]

- Bei der Abfüllung von Waschmittelpaketen sei die Füllmenge normalverteilt. Die eingestellte Sollmasse beträgt 1 020 g, die von der Füllanlage abhängige Standardabweichung σ beträgt 15 g.
 - Welcher Prozentsatz ist untergewichtig, wenn auf dem Paket 1 000 g angegeben sind?
 - Wieviel Prozent sind schwerer als 1 050 g?
 - Bei einer Kontrolle wurde festgestellt, daß 95% der Pakete in einem bestimmten Bereich um den eingestellten Wert (1 020 g) lagen. Welches um μ (1 020 g) symmetrische Toleranzintervall wurde dabei verwendet?
 - Eine neue Abfüllanlage mit $\sigma = 10$ g wird angeschafft. Auf welchen Mittelwert μ muß die Maschine eingestellt werden, wenn höchstens 5% aller Pakete weniger als 995 g enthalten sollen?
 - Welche Standardabweichung dürfte die neue Maschine höchstens haben, wenn maximal 3% aller Pakete um mehr als 10 g von der eingestellten Sollmasse (1 000 g) abweichen sollen?

[**Lösungen:** a) 9,121% b) 2,275% c) $\mu \pm 29,4$ d) $\mu = 1 011,45$ e) $\sigma = 4,608$]

9020 Klagenfurt, ORG St. Ursula, Ursulinengasse 5
Mag. Susanne Patscheider

1. Bestimme die Definitionsmenge, Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte der Funktion $f(x) = \ln x (2 \ln x - 3)$ und zeichne ihren Graphen. Berechne den Inhalt der von der Funktion und der x-Achse begrenzten Fläche.

[**Lösungen:** $N_1 (1/0)$ $N_2 (4,482/0)$ $T(2,117/-1,125)$ $W (5,755/0,875)$ $A = 2,518$]

2. Von einer Polynomfunktion 4. Grades kennt man $f''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + 4$.

Der Graph der Funktion hat in $H(-3/9)$ einen Hochpunkt.

- Bestimme die Funktionsgleichung. Berechne Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte der Funktion und zeichne ihren Graphen.
- Berechne den Inhalt der Fläche, die von f und der x-Achse begrenzt wird.
- Bestimme die Gleichung des Kreises, der durch die Extrempunkte von f geht.

[**Lösungen:** $f(x) = -\frac{1}{9}x^4 + 2x^2$ $N_{12} (\pm 4,24/0)$ $N_3 (0/0)$ $T(0/0)$ $H_{12} (\pm 3/9)$ $W_{12} (\pm \sqrt{3}/5)$ $A = 40,729$ $k: x^2 + (y-5)^2 = 25$]

3. Durch die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Kurve $6y^2 = (x+4)^3$ mit der Geraden $x = 2$ geht eine Parabel in 1. Hauptlage.

- Bestimme ihre Gleichung und zeichne beide Kurven.
- Das von beiden Kurven eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.
- Berechne die Gleichungen der Tangenten an die Parabel in den Schnittpunkten und den Inhalt des Flächenstücks, das von der Parabel und den beiden Tangenten begrenzt wird.

[**Lösungen:** $p: y^2 = 18x$ $V = 18\pi$ $A = 8$]

4. a) In einer Urne liegen 3 Kugeln mit der Nummer 1, 4 Kugeln mit der Nummer 2 und eine mit der Nummer 3. Es werden 2 Kugeln hintereinander ohne Zurücklegen gezogen. Zeichne ein Baumdiagramm. Die Zufallsvariable S bezeichnet die Summe der gezogenen Kugelnummern. Stelle ihre Verteilung grafisch durch ein Histogramm dar.
- b) Der Spieler hat gewonnen, wenn die Summe der gezogenen Kugelnummern 8 beträgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Spieler von 25 Spielen mindestens 3 und höchstens 7 Spiele gewinnt?
- c) Wie oft müßte der Spieler spielen, um mit einer Wahrscheinlichkeit größer als 97% mindestens einmal zu gewinnen?
- d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Spieler bei 700 Spielen mindestens 80 mal und höchstens 110 mal gewinnt? (Runde z_1 und z_2 auf 3 Dezimalstellen und rechne mit Stetigkeitskorrektur.)

[**Lösungen:** $P(3 \leq X \leq 7) = 0,694$ $n > 22,75$ $P(79,5 \leq X \leq 110,5) = 0,858$]

9020 Klagenfurt, ZG/ZRG za Slovence Prof.-Janežič-Platz 1 Mag. Martin Urbajs

1. Analitična geometrija v ravnini - trikotnik

V ogliščih trikotnika ABC $A(-9/-5)$, $B(5/-5)$, $C(12/16)$ nastavimo na očrtani krog tangente. Vsako tangento sečemo s premico, na kateri je nasprotna stranica. Pokaži, da ležijo vsa sečišča na isti premici. Pokaži to lastnost tudi grafično z enoto $E = 0,5 \text{ cm}$.

[**Rešitve:** $k_U: (x+2)^2 + (y-9)^2 = 245$ $a \cap t_A = S_1 (3/-11)$ $b \cap t_B = S_2 (-23/-19)$ $c \cap t_C = S_3 (\frac{45}{2} /-5)$ $g: 4x - 13y = 155$]

2. Trigonometrija

Splošni štirikotnik ABCD določajo dolžine treh stranic $AB = a = 75 \text{ cm}$, $BC = b = 73 \text{ cm}$, $DA = d = 82 \text{ cm}$ in kota $DAB = \alpha = 108,3^\circ$ in $ABC = \beta = 115,6^\circ$.

- Določi ploščino štirikotnika.
- Premica g , ki gre skozi točko A , naj razdeli štirikotnik v dva ploščinsko enaka dela. Ugotovi, ali preseka premica g stranico BC ali stranico CD . Kako daleč je to sečišče oddaljeno od oglišča C ?

[**Rešitve:** a) $7463,6$ b) $X \in CD$, $CX = 33,59$]

3. Verjetnostni računi

- Pri izpitu dobimo 5 vprašanj. Pri vsakem vprašanju so štirje odgovori, izmed katerih je samo en odgovor pravilen. X naj bo število pravilnih odgovorov. Opiši porazdelitev slučajne spremenljivke X z (1) verjetnostno funkcijo (2) z matematičnim upanjem in (3) z disperzijo.
- S strojem proizvajajo izdelke s 4% škartom.
 - Kakšna je verjetnost, da velja za serijo 60 izdelkov:
 - noben izdelek ni škart
 - kvečjemu dva izdelka sta slaba
 - več kot trije izdelki so slabi
 - Koliko slabih izdelkov pričakujemo med 60 izdelki in za koliko niha predvidoma ta vrednost navzgor in navzdol?
 - Za pravilno izdelan del je dobiček 4 S, za škart pa izguba 9 S. Kakšen dobiček bo predvidoma pri proizvodnji 1 000 izdelkov?

[**Rešitve:** a) $[0,237 \ 0,396 \ 0,264 \ 0,088 \ 0,015 \ 0,001]$ $\mu = 1,25$ $\sigma = 0,968$ b1) $P(X=0) = 0,086$ $P(X \leq 2) = 0,568$ $P(X > 3) = 0,219$ b2) $\mu = 2,4$ $\sigma = 1,518$ b3) $3480, -S$]

4. Diskusija transcendentne funkcije - ploščina

Določi ničle, ekstreme in obračaje funkcije $f(x) = (x+1)^2 \cdot e^{-x}$ in nastavi enačbe tangent v obračajih. Nariši funkcijo v intervalu $[-2;5]$. Izračunaj ploščino med krivuljo in x -osjo med mejama $x = -1$ in $x = 4$.

[**Rešitve:** $N = T(-1/0)$ $H(1/1,47)$ $W_1(-0,41/0,52)$ $W_2(2,41/1,04)$ $A = 4,759$]

9020 Klagenfurt, ZG/ZRG za Slovence Prof.- Janežič-Platz 1
Mag. Martin Urbajs

1. Rotacijsko telo - parabola in premici

Parabola $y = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 1)$ in premici $5x - y = 15$ in $y = 9$ tvorijo s koordinatnima osema v 1. kvadrantu ploskev. Če jo zavrtimo okoli y-osi, nastane telo v obliki vaze. Nariši z enoto $E = 1$ cm in izračunaj maso vaze ($\rho = 1,8 \text{ g/cm}^3$). Koliko tekočine lahko vlijemo v vazo in v kakšni višini sta markaciji za 100 ml oz. 200 ml?

[**Rešitve:** $m = 39,27 \text{ g}$ $V_{\text{par}} = 67,07\pi$ $h_1 = 6,142$ $h_2 = 8,479$]

2. Diskusija racionalne funkcije in določanje ploščine

Racionalna funkcije $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + 4}$ ima ničlo $N(-1/0)$ in gre skozi točki $P(-3/7)$ in $Q(1/1)$.

- Določi manjkajoče koeficiente funkcije.
- Diskutiraj funkcijo (brez 3. odvoda) in jo nariši v intervalu $[-7;7]$. Nariši tudi asimptoti.
- Določi ploščino med funkcijo in poševno asimptoto med mejama $x = 0$ in $x = 7$.

[**Rešitve:** a) $f(x) = \frac{-x^2 + 3x + 4}{2x + 4}$ b) $a_1: x = -2$ $a_2: y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$ $N_1(-1/0)$ $N_2(4/0)$ $T(-4,45/5,95)$ $H(0,45/1,05)$ $A = 4,51$]

3. Linearna geometrija v prostoru

Poznamo premici $g: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ in $h: X = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

in trikotnik ABC $[A(-4/-9/1), B(3/3/-1), C(6/-1/-3)]$. Trikotnik ABC predstavlja osnovno ploskev tristrane piramide, presečišče premic g in h pa je vrh te piramide. Izračunaj prostornino in površino piramide, kot med robom AS in osnovno ploskvijo ter koordinate točke S' , ki jo dobimo z zrcaljenjem točke S na ravnini ABC.

[**Rešitve:** $S(2/6/10)$ $V = 108$ $O = 241,919$ $\varphi = 29,122^\circ$ $S'(-6/8/-6)$]

4. Integracijski postopki

Reši določeni in nedoločeni integral

a) po delih: $\int_0^{2\pi} \cos 3x \cdot e^{-x} dx$

b) s substitucijo: $\int_0^2 x^2 \cdot e^{-\frac{x^3}{3}} dx$

c) z razstavljanjem v delne ulomke: $\int_2^3 \frac{3x+5}{x^2+x-2} dx$

[**Rešitve:** a) $\frac{e^{-x}}{10} (3 \cdot \sin 3x - \cos 3x) \Big|_0^{2\pi} = 0,0998$ b) $-e^{-\frac{x^3}{3}} \Big|_0^2 = 0,9305$ c) $\frac{1}{3} \cdot \ln((x-1)^8 |x+2|) \Big|_2^3 = 1,923$]

9063 Maria Saal, BG Tanzenberg
Mag. Mathilde Kanovsky

1. Bestimme die Gleichung einer Ellipse in erster Hauptlage, die durch den Wendepunkt der Kurve $k: y = 18x^2 + \frac{861}{8}x - \frac{839}{4}$ geht, wenn ein Brennpunkt durch $F(5 \cdot \sqrt{3} / 0)$ gegeben ist.

[Lösungen: $e: x^2 + 4y^2 = 100$]

2. In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneiden sich die Tangenten, die in den Nullstellen der Funktion $f: x \rightarrow \frac{x^2 - x - 2}{2x - 5}$ an den Graphen von f gelegt werden?

Bestimme den größtmöglichen Definitionsbereich.

[Lösungen: $S(\frac{13}{8} / \frac{9}{8}) \quad \varphi = 85,2^\circ$]

3. Der Graph der Funktion $f: x \rightarrow -1,5 \cdot x^2 + 27$ begrenzt mit der x -Achse ein zur y -Achse symmetrisches Parabelsegment. Rotiert diese Fläche um die y -Achse, so entsteht ein Drehkörper, dem ein Zylinder mit größtmöglichem Rauminhalt eingeschrieben werden soll. Bestimme Radius, Höhe und Volumen dieses Zylinders.

[Lösungen: $r = 3 \quad h = 13,5 \quad V_{\max} = 121,5\pi$]

4. Von einem ebenen Dreieck ABC kennt man die Eckpunkte $A(-1/15)$, $B(-1/1)$, $C(11/6)$.

Berechne die vier merkwürdigen Punkte S, H, U und I.

Erstelle die Gleichung des Umkreises und jene des Inkreises.

Gib die Eulersche Gerade an und untersuche, ob diese I enthält.

Benutze für die Berechnungen eine Skizze.

[Lösungen: $S(3/\frac{22}{3}) \quad H(\frac{11}{4}/6) \quad U(\frac{25}{8}/8) \quad I(3/7) \quad r_U = \frac{65}{8} \quad r_I = 4 \quad e: 16x - 3y = 26$]

5. Karl und Anton tragen eine Serie von Tennisspielen aus. Die Wahrscheinlichkeit, daß Karl gewinnt, beträgt $p = 0,6$.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß Karl von 5 Spielen die Mehrzahl gewinnt?

b) Wie oft müßten sie gegeneinander spielen, damit Anton mit mindestens 95%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Spiel gewinnt?

c) Berechne den Erwartungswert von Karl bei 5 Spielen allgemein und überprüfe mittels Formel für die Binomialverteilung.

[Lösungen: a) 0,6826 b) 6 c) $E(X) = 3,002$]

1. Zeige, daß die beiden Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: X = \begin{pmatrix} -11 \\ 7 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ einander im

Punkt S schneiden. Ihr Schnittpunkt sei die Spitze eines Tetraeders, dessen Grundfläche durch das Dreieck A(2/4/3), B(4/8/2) und C(1/2/9) bestimmt ist. Berechne

- das Volumen des Tetraeders,
- den Neigungswinkel α der Kante AS gegen die Grundfläche ABC,
- die Koordinaten des Punktes S', den man durch Spiegelung des Punktes S an der Ebene ABC erhält.

[**Lösungen:** $S(5/3/1)$ $V = \frac{77}{6}$ $\alpha = 56,8^\circ$ $S'(-\frac{3}{5}/\frac{29}{5}/1)$]

2. Ein dreieckiges, ebenes Grundstück mit den Seiten a und b und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel γ soll durch einen möglichst kurzen Zaun, der zwei Punkte der Seiten a und b verbindet, in zwei flächengleiche Hälften geteilt werden. Berechne die Länge des Zaunes.

[**Lösungen:** $\sqrt{a \cdot b \cdot (1 - \cos \gamma)}$]

- 3a) Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{x}{4} \cdot \sqrt{x+12}$ (Definitionsmenge, Null-, Extrem- und Wendestellen, Tangenten in den Nullstellen und Graph).

- 3b) Welches Krümmungsverhalten zeigt diese Funktion?

- 3c) Die von der Kurve und x-Achse eingeschlossene Fläche rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Drehkörpers?

[**Lösungen:** a) $N_1(-12/0)$ $t_1: x = -12$ $N_2(0/0)$ $t_2: y = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ $T(-8/-4)$ kein Wendepunkt b) $\forall x: f'' > 0$ c) $V_x = 108\pi$]

4. Der Intelligenzquotient IQ sei eine μ - σ -normalverteilte Zufallsvariable bei zufälliger Auswahl einer erwachsenen Person aus der Bevölkerung mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$.

- Welchen IQ braucht man, wenn man zu den intelligentesten 1% der Bevölkerung gehören will?
- Für wieviel Prozent gilt $IQ < 60$ (Schwachsinn) bzw. $IQ > 140$ (Genialität)?
- Bei welchem Sollwert μ (und gleichem σ) würden 1% der Erwachsenen zu den genialen Menschen zählen?
- Was versteht man unter einer normalverteilten Zufallsvariablen? Wodurch unterscheidet sie sich von einer Binomialverteilung?

[**Lösungen:** a) $IQ \geq 135$ b) je 0,35% c) $\mu = 105,5$]

9073 Klagenfurt-Viktring, BRG Stift-Viktring-Straße 25
Mag. Richard Peterl

1. Vor 10 Jahren betrug der Holzbestand eines Waldes $7\,000\text{ m}^3$. Ohne Schlägerung ist er inzwischen auf $9\,880\text{ m}^3$ angewachsen. Man darf annehmen, daß das Holzwachstum ein exponentieller Vorgang ist.
- a) Zeige, daß die jährliche Wachstumsrate ca. 3,5% beträgt.
 - b) Nach wie vielen Jahren hat sich der Holzbestand verdoppelt?
 - c) Man hat vor, in 3 Jahren $3\,000\text{ m}^3$ Holz zu schlägern. Wann wird dieser Wald den heutigen Holzbestand wieder erreichen?
 - d) Berechne den Holzbestand in 5 Jahren, wenn am Beginn jedes Jahres 300 m^3 Holz geschlägert werden.
 - e) Erkläre den Begriff „exponentielles Wachstum“.

[Lösungen: b) 20,11 c) 9,3 d) $10\,072,4\text{ m}^3$ e) $N'(t) = k \cdot N(t)$]

2. Gegeben ist das Dreieck ABC [A(-20/-9), B(30/-9), C(12/15)]. Die Seitenmittelpunkte D, E, F bilden ein Dreieck. Zeige, daß der Umkreis dieses Dreiecks den Inkreis des Dreiecks ABC $k_i: (x-10)^2 + (y-1)^2 = 100$ berührt und ermittle die Koordinaten des Berührungspunktes.

[Lösungen: $(x-8,5)^2 + (y-3)^2 = 156,25$ T(16/-7)]

3. Eine reelle Funktion hat die 1. Ableitung $f'(x) = \frac{3}{4}(5-x)(x-1)$, der Hochpunkt des Graphen liegt auf der x-Achse.
- a) Ermittle die Funktionsgleichung.
 - b) Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen.
 - c) Berechne den Inhalt des vom Funktionsgraphen und der x-Achse begrenzten Flächenstücks.

[Lösungen: a) $f(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + 9x^2 - 15x - 25)$ b) $N_1(-1/0)$ $N_2 = H(5/0)$ T(1/-8) W(3/-4) c) $A = 27$]

4. Bei einem Eignungstest werden 300 Fragen gestellt. Zu jeder Frage stehen 3 Antworten zur Auswahl, von denen genau eine richtig ist. Der Test gilt als bestanden wenn mindestens die Hälfte der Fragen richtig beantwortet wird.
- a) In welchem Bereich liegt mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit die Zahl der richtigen Antworten, wenn jemand keine Ahnung von den gefragten Inhalten hat und nur zufällig ankreuzt?
 - b) Ein Kandidat weiß auf 20% der Fragen die richtige Antwort, in den übrigen Fällen kreuzt er zufällig an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er den Test besteht?
 - c) Wie viele richtige Antworten unter 300 Fragen müßte man für eine positive Bewertung verlangen, damit jemand, der nur 20% der Antworten weiß und sonst zufällig ankreuzt, den Test mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit nicht besteht?

[Lösungen: a) [86;114] b) 0,085 c) 158]

9073 Klagenfurt-Viktring, BRG Stift-Viktring-Straße 25
Mag. Wolfgang Schmidhofer

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x}{3} \cdot \sqrt{9-x}$.

Untersuche die Funktion auf Null- und Extremstellen und zeichne den Graphen von $f(x)$ im Bereich $[-1;9]$.

Die x-Achse, die Gerade $x = 9$ und die Tangente an f im Ursprung bilden ein Dreieck. Zeige, daß dieses Dreieck gleichschenkelig ist.

Die Funktion und die x-Achse schließen im Bereich $[0;9]$ ein Flächenstück ein. Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der bei Drehung dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht. Begründe, warum dieser Körper durch Abschleifen aus einer Holzkugel mit dem Durchmesser $d = 9$ hergestellt werden kann.

[**Lösungen:** $N_1 (0/0)$ $N_2 (9/0)$ $H(6/2 \cdot \sqrt{3})$ $V_x = 60,75\pi$ $f(x) \leq \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{9}{2}\right)^2}$]

- 2a) In einem Koordinatensystem sind zwei Straßen durch die Geraden $g: 3x + 4y = 1\,500$ und $h: 7x - 24y = 3\,500$ festgelegt (Maße in m). Von g soll ein kreisförmiger Übergangsbogen nach h über den stumpfen Winkel hergestellt werden. Der Bogen soll im Punkt $P(100/300)$ auf g beginnen. Berechne die Gleichung des Kreises, auf dem der Übergangsbogen liegt, sowie die Koordinaten des Berührungspunktes Q auf h . Berechne weiters die Länge des bogenförmigen Straßenstücks zwischen P und Q .

- 2b) Leite mit Hilfe der Formeln für das rechtwinkelige Dreieck die Beziehung $a : \sin \alpha = b : \sin \beta$ in einem beliebigen Dreieck her (unterscheide spitz- und stumpfwinkelige Dreiecke).

[**Lösungen:** a) $(x-700)^2 + (y-1\,100)^2 = 1\,000\,000$ $Q(980/140)$ b) ≈ 927 m]

- 3a) Der radioaktive Anteil eines Organismus sinkt in 250 Jahren auf 91,3% ab. Stelle das Zerfallsgesetz auf und berechne die Halbwertszeit. Wie alt ist ein Bastschuh, dessen radioaktiver Anteil noch 75,3% beträgt? Stelle den Zerfallsvorgang grafisch dar und zeige, daß die Zerfallsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t direkt proportional zur Anzahl der noch nicht zerfallenen Atome ist.

- 3b) Beweise mit Hilfe der Definition des Logarithmus: ${}^a \log \frac{u}{v} = {}^a \log u - {}^a \log v$.

[**Lösungen:** a) $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,000364t}$ Halbwertszeit $\approx 1\,904$ Jahre Bastschuh ≈ 780 Jahre $N'(t) = N(t) \cdot \ln a$]

4. Beim Roulettespiel fällt eine Kugel auf eine der 37 Zahlen 0, 1, 2, ..., 36. Alle diese Zahlen treten mit gleich großer Wahrscheinlichkeit auf. Setzt ein Spieler auf eine bestimmte Zahl, so erhält er das 36-fache seines Einsatzes ausbezahlt, falls die Kugel auf diese Zahl fällt, andernfalls ist sein Einsatz verloren.

Spieler A spielt dreimal und setzt jedesmal S 100,- auf die Zahl 19. Spieler B spielt höchstens dreimal. Dabei setzt er jedesmal S 100,- auf die Zahl 19, hört jedoch im Falle eines Gewinnes mit dem Spielen auf. Berechne für die beiden Spielstrategien den Erwartungswert des Verlustes des Spielers.

Spieler C setzt zehnmal hintereinander darauf, daß eine ungerade Zahl getroffen wird. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß er mindestens drei Spiele gewinnt?

Das Rouletterad wird 900 mal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens 445 mal eine ungerade Zahl kommt?

[**Lösungen:** A: 8,10 B: 7,89 C: $P(X \geq 3) = 0,935$ $P(X \geq 445) = 0,34$]

9073 Klagenfurt-Viktring, BRG Stift-Viktring-Straße 25
Mag. Josef Schuhmann

- 1a) Diskutiere die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow (4-x) \cdot \sqrt{x}$ und zeichne den Graphen im Intervall $[0;5]$.
1b) Berechne den Flächeninhalt des vom Graphen und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücks.
1c) Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der bei Rotation dieses Flächenstücks um die x-Achse entsteht.
1d) Erkläre die Begriffe „streng monoton steigend“ bzw. „streng monoton fallend“ und untersuche diesbezüglich die obige Funktion.

[**Lösungen:** a) $N_1 (0/0)$ $N_2 (4/0)$ $H(1,33/3,08)$ kein Wendepunkt b) $A = 8,533$ c) $V_x = 21,333\pi$]

2. Von einem Berg herab sieht man zwei in einer Ebene liegende Orte A und B unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 69^\circ$ und $\beta = 28,5^\circ$. Ihre Entfernung von 2 500 m wird unter dem Horizontalwinkel $\varphi = 32,5^\circ$ erkannt.

- a) Fertige eine Skizze an.
b) Wie hoch liegt der Beobachtungspunkt?
c) Wie weit sind A und B vom Beobachtungspunkt entfernt?

[**Lösungen:** b) 1631,88m c) $d_A = 1747,98\text{m}$ $d_B = 3420\text{m}$]

3. Gegeben sind der Kreis $k: x^2 + y^2 + 12x + 10y - 64 = 0$ und die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.

- a) Bestimme die Schnittpunkte S_1 und S_2 von Kreis und Gerade.
b) Ermittle den Abstand der Geraden vom Kreismittelpunkt.
c) Berechne den Schnittwinkel S_1MS_2 .
d) In S_1 und S_2 sind die Tangenten an den Kreis zu legen.

[**Lösungen:** a) $S_1 (-1/5)$ $S_2 (5/-3)$ b) $d = 10$ c) $\alpha = 53,13^\circ$ d) $t_1: x + 2y = 9$ $t_2: 11x + 2y = 49$]

4. Ein Entwässerungskanal soll einen Querschnitt mit $A = 1 \text{ m}^2$ haben. Er wird aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis gebildet.

- a) Fertige eine Skizze an.
b) Wie groß sind die Rechteckseiten zu wählen, damit der Umfang (also der Materialverbrauch) ein Minimum wird?
c) Berechne Umfang und Höhe des Kanals.

[**Lösungen:** b) $x = 1,1 \text{ m}$ $y = 0,5 \text{ m}$ c) $U = 3,8 \text{ m}$ $h = 1,0 \text{ m}$]

9100 Völkermarkt, BG/BRG Pestalozzistraße 1
Mag. Astrid Kolmanics

1. Die Parabel mit der Gleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$ hat den Scheitel $S(0/6)$ und geht durch den Punkt $A(3/\frac{9}{2})$.

- a) Zeige, daß die Funktionsgleichung $f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 6$ lautet.
b) Das oberhalb der x-Achse liegende Segment rotiert um die y-Achse. Diesem Paraboloidsegment ist ein Drehkegel mit maximalem Volumen so einzuschreiben, daß seine Spitze in $O(0/0)$ liegt. Berechne Radius und Höhe des Drehkegels.
c) Dem Paraboloidsegment und dem Drehkegel soll ein weiterer Drehkegel so umschrieben werden, daß alle drei Körper einen gemeinsamen Berührungskreis haben. Die x-Achse begrenzt alle Körper nach unten. Ermittle das Verhältnis der Volumina dieser drei Körper.

[**Lösungen:** b) $r = 3 \cdot \sqrt{2}$ $h = 3$ $V_{K1} = 18\pi$ $V_p = 108\pi$ c) $V_{K2} = 121,5\pi$ $V_{K1} : V_p : V_{K2} = 1 : 6 : 6,75$]

2. Zwei Punkte P und Q einer Horizontalebene liegen auf verschiedenen Seiten eines Flusses und sollen durch eine Hängebrücke verbunden werden. Zur Berechnung der Entfernung PQ werden in der gleichen Horizontalebene die Standlinie $AB = s = 245$ m und die folgenden Winkel gemessen: $PAB = \alpha = 114^\circ 10'$, $QAB = \beta = 32^\circ 48'$, $ABQ = \gamma = 106^\circ 57'$, $ABP = \delta = 37^\circ 12'$.

- a) Ermittle die Entfernung PQ auf Meter genau.
b) Das Hängetau ist um 36,36% länger. Berechne seine Länge auf Meter genau.

[**Lösungen:** a) 440 m b) 600 m]

3. Für jedes $t \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = t^2 \cdot \left(x + \frac{1}{t}\right) \cdot e^{-tx}$.

- a) Untersuche die Funktion f_t auf Nullstellen, Extremstellen und Wendestellen.
b) Die Wendetangente von f_t bildet mit den Koordinatenachsen ein Dreieck. Zeige, daß der Inhalt dieses Dreiecks vom Parameter unabhängig ist.
c) Zeichne eine genaue Skizze der Kurve für $t = 1$ im Intervall $-1,5 \leq x \leq 4$. (Wertetabelle!)
d) Berechne den Inhalt der Fläche, die die Funktion f_t mit den Koordinatenachsen einschließt.

[**Lösungen:** a) $N(-\frac{1}{t}/0)$ $H(0/t)$ $W(\frac{1}{t} / \frac{2t}{e})$ b) $A = \frac{9}{2e}$ d) $A = e-2$]

4. Ein Kreis k, der durch die Punkte $A(-2/2)$ und $B(1/5)$ geht, hat seinen Mittelpunkt auf der Geraden $g: 3x - 5y = 1$.

- a) Ermittle die Koordinaten des Mittelpunktes des Kreises k und seine Gleichung.
b) Berechne die Gleichung der zur Strecke AM parallelen Tangente an den Kreis k und die Fläche des Dreiecks ABM.
c) Ermittle von diesem Dreieck den Umkreismittelpunkt. Fertige eine genaue Zeichnung an.

[**Lösungen:** a) $k: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 17$ b) $t_1: x+4y = 23$ $t_2: x+4y = -11$ $A = 7,5$ c) $U(\frac{3}{10} / \frac{27}{10})$]

5. Ein Student muß in einer Klausur 8 von 10 Fragen richtig beantworten.

- a) Wie viele Möglichkeiten hat er?
b) Wie viele sind es, wenn er die ersten 3 Fragen richtig beantworten muß?
c) Wenn er mindestens 4 der ersten 5 Fragen richtig beantworten muß?

[**Lösungen:** a) 45 b) 21 c) 35]

9100 Völkermarkt, BG/BRG Pestalozzistraße 1
Mag. Peter Micheuz

1. Der Querschnitt eines Sektglases (ohne Stiel) hat die Form einer Parabel mit der Gleichung $y = 2x^2$.
 - a) Das Glas hat, wenn es randvoll gefüllt ist, ein Fassungsvermögen von 0,1 Liter. Wie hoch ist es und wie groß ist der Durchmesser am oberen Glasrand (auf 2 Dezimalen genau)?
 - b) Auf dem Maturaball wird Sekt-Orange angeboten. Der Schüler Schlau schenkt zuerst bis zu einer Höhe von 5 cm Sekt ein und dazu weitere 5 cm Orangensaft. Der Schüler Nixdenk macht es umgekehrt. Beide verkaufen 50 Gläser Sekt-Orange. Um wieviel öS hat der Schüler Schlau mehr verdient, wenn 1 Liter Sekt im Einkauf öS 60,- bzw. 1 Liter Orangensaft öS 5,- gekostet hat und beide ein Glas Sekt um öS 40,- verkauft haben?

[**Lösungen:** a) $h = 11,28$ cm $d = 4,75$ cm b) öS 108,-]

2. Bei einer Fragebogenaktion kann das Einlangen der ausgefüllten Fragebögen mit der logistischen Funktion $f(t) = \frac{a}{1 + b \cdot e^{-kt}}$ beschrieben werden ($t \dots$ Tage).
 $f(t)$ gibt die Anzahl der bis zum t . Tag zurückgesandten Fragebögen an.
 - a) Berechne a , b und k aus folgenden Angaben:
 - Es wurden 4 000 Fragebögen verschickt, insgesamt sind nur 20% zurückgekommen.
 - 4 Fragebögen waren bereits zum Zeitpunkt $t = 0$ da (von den Fragebogenerstellern ausgefüllt).
 - Nach 30 Tagen waren 400 Briefe eingelangt.
 - b) Zeige, daß $g(t) = N(1 - A \cdot e^{-kt})$ mit $N = 800$, $A = 0,995$ und $k = 0,0229378$ ebenfalls obige 3 Bedingungen erfüllt. Berechne weiters für $g(t)$ allgemein die „Halbwertszeit“ in Abhängigkeit von A und K .
 - c) Wie viele Fragebögen langen am 30. Tag beim ersten bzw. zweiten Modell ein?
 - d) Fertige für beide Modelle eine in den wesentlichen Punkten richtige Verlaufsskizze an und kommentiere beide Funktionen.

[**Lösungen:** a) $f(t) = \frac{800}{1 + 199 \cdot e^{-0,176445t}}$ b) Halbwertszeit: $\frac{\ln 2A}{K}$ c) 1. Modell: 35 2. Modell: 9]

3. Ein Kreis berührt die Gerade $g: X = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und verläuft durch die Punkte $T_1 (2/-4)$ und $T_2 (3/7)$.
 - a) Ermittle die Gleichung des Kreises mit dem kleineren Radius.
 Die Tangenten in den Punkten T_1 sowie T_2 bilden zusammen mit g ein Dreieck, dessen Eckpunkte $A, B \in g$ und C berechnet oder der Zeichnung entnommen werden können. Der Eckpunkt A ist rechnerisch zu kontrollieren.
 - b) Dieses Dreieck ist durch eine zu g parallele Gerade h in zwei flächengleiche Teile zu zerlegen. Wie lautet die Gleichung dieser „Schnittgeraden“?

[**Lösungen:** a) $k: (x-1)^2 + (y+6)^2 = 5$ $A(-4/-1)$ $B(1/-11)$ $C(4/-5)$ b) $h: 2x+y = 3(1-2 \cdot \sqrt{2})$]

4. Ein Eignungstest enthält unter anderem auch 6 Fragen zum aktuellen Tagesgeschehen. Zu jeder dieser Fragen sind 4 Antworten zur Auswahl gegeben, von denen genau eine richtig ist. Es wird angenommen, daß der Kandidat auf gut Glück die Antworten rät.
 - a) Stelle eine Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsvariable $X =$ „Anzahl der richtigen Antworten“ auf und stelle diese in einem Stabdiagramm grafisch dar. Gib den Erwartungswert und die Standardabweichung an.

- b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit besteht der Kandidat diesen Test, wenn er mindestens 3 Fragen richtig beantworten muß? Wie viele Fragen wären notwendig, wenn der Kandidat mit 99%-iger Sicherheit mindestens eine Frage richtig beantworten wollte?
- c) Bei wie vielen Fragen könnte man diese diskrete Binomialverteilung durch das Modell der Normalverteilung ersetzen (Kriterium: $\sigma > 3$)? Ermittle nach diesem Modell die Wahrscheinlichkeit, mit der der Kandidat von 100 gestellten Fragen mindestens 30 zufällig richtig beantwortet.

[**Lösungen:** a) [0,178 0,356 0,297 0,132 0,033 0,004 0,0002] b) 0,169 $n \geq 16,008$ c) $n > 48$ $P(X \geq 30) = 0,125$ bzw. 0,103 mit Stetigkeitskorrektur]

9100 Völkermarkt, BG/BRG Pestalozzistraße 1
Mag. Othmar Winter

1a) Diskutieren Sie die Funktion $f: x \rightarrow \frac{x^3}{x^2 - 16}$:

Definitionsbereich, Asymptoten, Symmetrieeigenschaften, Nullstellen, Extrempunkte, Wendepunkte mit Wendetangenten.

1b) Fertigen Sie eine exakte Zeichnung im Intervall $[-10;10]$ an (Rundung auf 3 Dezimalen).

1c) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von der Kurve und den Geraden $x = 6$, $x = 10$ und $y = x$ begrenzt wird. Umranden Sie diese Fläche in der Zeichnung färbig.

[**Lösungen:** $a_{1,2}: x = \pm 4$ $a_3: y = x$ $N = W(0/0)$ $t_W: y = 0$ $H(-4 \cdot \sqrt{3} / -6 \cdot \sqrt{3})$ $T(4 \cdot \sqrt{3} / 6 \cdot \sqrt{3})$ $A = 11,481$]

2. An die Parabel $\text{par}: y^2 = 2px$ sollen in den Punkten $T_1(x_1/4)$, $T_2(1,5/y_2 > 0)$ und $T_3(6/12)$ die Tangenten gelegt werden. Die Schnittpunkte dieser drei Tangenten bilden ein Dreieck ABC. Zeige, daß der Umkreis dieses Dreiecks durch den Brennpunkt der Parabel geht.

[**Lösungen:** $\text{par}: y^2 = 24x$ $F(6/0)$ $t_1: 3x-4 = -2$ $t_2: 2x-y = -3$ $t_3: x-y = -6$ $k_U: (x-6)^2 + (y-5)^2 = 25$]

3. Eine Kugel geht durch den Punkt $A(2/4/-1)$ und berührt die Ebene $\tau_1: 6x - 2y - z = 52$ im Punkt $B(x_1/-3/2)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Kugel.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene τ_2 im Punkt A.

c) Berechnen Sie den Schnittwinkel φ der beiden Tangentialebenen (in Grad auf 1 Dezimale gerundet).

[**Lösungen:** $k: (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 41$ $\tau_2: 5y-4z = 24$ $\varphi = 81,6^\circ$]

4. Die Ellipse $\text{ell}: 9x^2 + 25y^2 = 225$ rotiert um die x-Achse. Dem Ellipsoid ist der volumsgrößte Kegel einzuschreiben, dessen Spitze in einem Hauptscheitel der Ellipse liegt und dessen Achse mit der Hauptachse der Ellipse zusammenfällt (Skizze).

Wie groß sind Radius und Höhe dieses Kegels? Wie verhält sich das Volumen des Kegels zu dem des Ellipsoids?

[**Lösungen:** $r = 2 \cdot \sqrt{2}$ $h = \frac{20}{3}$ $V_K = \frac{160}{9} \pi$ $V_{\text{ell}} = 60\pi$ $V_K : V_{\text{ell}} = 8 : 27$]

9300 St. Veit an der Glan, BG/BRG Dr.-Arthur-Lemisch-Straße 15
Mag. Fritz Kaplan

1. Bestimme in der Funktion $f(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^x$ die Koeffizienten a, b, c so, daß die Kurve im Ursprung die Steigung 2 hat und eine Nullstelle bei $x = 2$ liegt. Diskutiere die Funktion.

[**Lösungen:** $N_1 (0/0)$ $N_2 (2/0)$ $T_1 (-\sqrt{2} / -1,17)$ $T_2 (\sqrt{2} / 3,41)$ $W_1 (-2,73 / -0,84)$ $W_2 (0,73 / 1,92)$]

2. K_1 und K_2 seien zwei Kugeln, die einander schneiden. Der Schnittkreis ist die Basis eines Tangentenkegels der Kugel K_1 . Berechne die Spitze dieses Kegels.

$$K_1: \left[X - \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]^2 = 27 \quad K_2: \left[X - \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right]^2 = 54$$

[**Lösungen:** $M(-3/3/3)$ $r = 3 \cdot \sqrt{2}$ $S(1/7/5)$]

3. Im Punkt $P(2/y)$ der Kurve $y = x^2 + 1$ wird die Normale errichtet. Man bestimme das Maß A der von den positiven Koordinatenachsen, der Kurve und dieser Normalen eingeschlossenen Fläche. Berechne ferner das Maß des Volumens jenes Körpers, der entsteht, wenn diese Fläche um die x -Achse rotiert.

[**Lösungen:** $A = 50$ $V = 180,4\pi$]

4. Ermittle die Lösungsmenge z_1, z_2 der Gleichung $iz^2 + (2-3i)z - (5-5i) = 0$ in der Menge der komplexen Zahlen. Wie lautet eine Gleichung zweiten Grades mit komplexen Koeffizienten, deren Lösungsmenge $L = \{z_1+z_2, z_1 \cdot z_2\}$ ist? Stelle die Lösung in der Gaußschen Zahlenebene dar.

[**Lösungen:** $z_1 = 1+3i$ $z_2 = 2-i$ Gleichung: $z^2 - (8+7i)z + (5+25i) = 0$]

1. Ein Auto beschleunigt aus dem Stand (Anfangszeitpunkt 0, Anfangsgeschwindigkeit 0). Dabei nimmt die Beschleunigung ab und wird schließlich 0 (bei Erreichung der Höchstgeschwindigkeit). Die Beschleunigung t Sekunden nach dem Start ist annähernd gegeben durch:

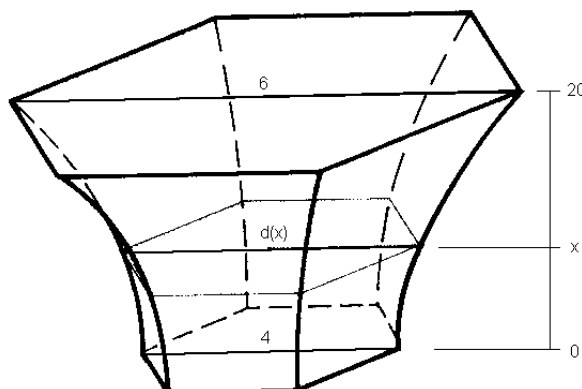
$$a(t) = 3 - 0,1125 \cdot t + 0,0009375 \cdot t^2.$$

Diese Formel gilt bis zu dem Zeitpunkt t , für den $a(t) = 0$ ist (also bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit).

- Wie lange beschleunigt das Auto?
- Gib eine Formel für die Geschwindigkeit $v(t)$ zum Zeitpunkt t an.
- Bestimme die Höchstgeschwindigkeit (in m/s und km/h).
- Gib eine Formel für die Länge $w(0;t)$ des Weges an, den das Auto bis zum Zeitpunkt t zurücklegt.
- Berechne die Länge des Weges bis zur Erreichung der Höchstgeschwindigkeit.
- Berechne mit dem Verfahren der dezimalen Schritte näherungsweise die Zeit (auf Sekunden gerundet), die das Auto für die ersten 500 m braucht.
- Welche Geschwindigkeit (in km/h) hat das Auto ungefähr nach 500 m?

[**Lösungen:** a) 40 s b) $v(t) = 3t - 0,05625t^2 + 0,0003125t^3$ c) 180 km/h d) $w(0;t) = 1,5t^2 - 0,01875t^3 + 0,000078125t^4$ e) ≈ 1403 m f) 21 s g) ≈ 148 km/h]

2. Es soll eine 20 m hohe Säule der abgebildeten Form errichtet werden:



Die Querschnittsfläche soll in jeder Höhe ein regelmäßiges Sechseck sein. Die Diagonalenlänge dieser Sechsecke soll von 4 m am Boden bis zu 6 m an der Decke zunehmen. Diese Zunahme soll so erfolgen, daß die Diagonalenlänge in der Höhe x von folgender Form ist: $d(x) = a \cdot x^2 + b$.

- Bestimme die Konstanten a und b und gib eine Termdarstellung von $d(x)$ an.
- Fertige eine Skizze der Querschnittsfläche in der Höhe x an und stelle eine Formel für den Flächeninhalt $A(x)$ dieser Fläche auf.
- Begründe, daß das Volumen der Säule als Integral dargestellt werden kann.
- Wie viele m^3 Beton sind zur Errichtung der Säule erforderlich?

[**Lösungen:** a) $d(x) = \frac{1}{200} x^2 + 4$ b) $A(x) = \frac{\sqrt{3}}{16} \cdot \left(\frac{1}{40\,000} x^4 + \frac{1}{25} x^2 + 16 \right)$ d) $\approx 48 \text{ m}^3$]

3. Jemand hat einen Würfel so angefertigt, daß seine sechs Flächen die Zahlen 1, 1, 1, 1, 2, 2 tragen. Zwei Spieler A und B vereinbaren folgendes Spiel: mit diesem Würfel wird dreimal gewürfelt. Erscheint dabei 1 öfter als 2, dann gewinnt A und erhält von B einen Schilling. Erscheint B öfter als A, dann gewinnt B und erhält von A zwei Schillinge.

- Zeichne ein Baumdiagramm und schreib die jeweiligen Gewinne von A bzw. B darunter.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält A von B einen Schilling, mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält B von A zwei Schillinge?

- c) Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Gewinns G_A für den Spieler A bzw. des Gewinns G_B für den Spieler B jeweils durch eine Tabelle an.
- d) Berechne die Erwartungswerte $E(G_A)$ und $E(G_B)$. Was bedeuten diese Zahlen? Ist das Spiel fair? Begründe!
- e) Berechne die Varianzen $V(G_A)$ und $V(G_B)$. Welche Verteilung streut stärker um den jeweiligen Erwartungswert?

[**Lösungen:** b) $P(A \text{ gewinnt}) = \frac{20}{27}$ $P(B \text{ gewinnt}) = \frac{7}{27}$ d) $E(G_A) = \frac{6}{27}$ $E(G_B) = -\frac{6}{27}$ e) $V(G_A) \approx 1,73$ $V(G_B) \approx 1,73$]

4. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid x \rightarrow -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$.

- a) Ermittle die Monotoniebereiche von f . Begründe mit Hilfe geeigneter Definitionen und Sätze für jeden Bereich, warum f dort monoton wachsend bzw. fallend ist. Skizziere den Graphen von f .
- b) Gib die lokalen Extremstellen von f an. Begründe mit Hilfe geeigneter Definitionen und Sätze für jede lokale Maximumstelle, warum sie eine solche Stelle ist.
- c) Ermittle die Maximum- bzw. Minimumstellen von f im Intervall $[0;4]$.
- d) Begründe, daß $f(x) \leq 1$ für alle $x \geq 0$.

[**Lösungen:** b) lokales Maximum: $x = 3$ lokales Minimum: $x = 1$ c) Maximumstellen: 0 und 3 Minimumstellen: 1 und 4]

9330 Treibach-Althofen, BORG Friesacher Straße 4
Mag. Herbert Obmann

1. Berechnen Sie die vier Punkte der Hyperbel $9x^2 - 7y^2 = 63$, deren Brennstrahlen rechte Winkel bilden.

Eine Ellipse in erster Hauptlage geht ebenfalls durch diese Punkte. Sie bilden mit den Hauptscheiteln der Ellipse vier Dreiecke, von denen jedes den Flächeninhalt 11,25 FE besitzt. Wie lautet die Gleichung der Ellipse?

Jene Fläche, die von Ellipse und Hyperbel begrenzt wird und den Koordinatenursprung enthält, rotiert um die y-Achse. Wie groß ist das entstehende Volumen?

[**Lösungen:** $S_{1234} (\pm \frac{5 \cdot \sqrt{7}}{4} / \pm \frac{9}{4})$ e: $9x^2 + 25y^2 = 225$ $V = 46\pi$]

2. Eine Kugel geht durch den Punkt $Q(2/4/-1)$ und berührt die Ebene $\varepsilon_1: [A(10/4/0), B(8/0/-4), C(8/-5/6)]$ im Punkt $P(x/-3/2)$. Die Ebene ε_2 ist die Tangentialebene an die Kugel im Punkt Q.

Berechnen Sie die Gleichung der Ebene ε_1 .

Stellen Sie die Gleichung der Kugel auf.

Berechnen Sie jenen Winkel, den die beiden Ebenen ε_1 und ε_2 einschließen.

[**Lösungen:** $\varepsilon_1: 6x - 2y - z = 52$ k: $(x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 41$ $\varphi = 81,585^\circ$]

3. Gegeben ist die Funktion $f: y = \frac{x^2 + 2x}{(x-1)^2}$.

a) Untersuchen Sie die Funktion nach Definitionsbereich, Polstellen, Asymptoten und besonderen Kurvenpunkten und zeichnen Sie den Graphen im Intervall $[-5;7]$. Die 3. Ableitung braucht nicht berechnet zu werden, denn man weiß, daß die Funktion genau einen Wendepunkt besitzt.

b) Bestimmen Sie den Inhalt jener Fläche, die von f, der x-Achse und den Geraden $x = 2$ und $x = 4$ begrenzt wird.

[**Lösungen:** $a_1: x=1$ $a_2: y=1$ $N_1 (-2/0)$ $N_2 (0/0)$ $T(-\frac{1}{2} / -\frac{1}{3})$ $W(-\frac{5}{4} / -\frac{5}{27})$ $A = 8,395$]

4. Der oberen Hälfte eines linsenförmigen Rotationsellipsoids (a,b) soll der volumsgrößte Drehzylinder so eingeschrieben werden, daß dessen Höhe mit der kleinen Halbachse zusammenfällt.

In welchem Verhältnis stehen die beiden Volumina zueinander?

Wieviel Prozent des Ellipsoidvolumens beträgt dieses Zylindervolumen?

Zu welchem Kapitel gehört eine derartige Aufgabe?

Gegenüber den Kurvendiskussionen kann man bei derartigen Aufgaben Vereinfachungen durchführen. Führen Sie die besprochenen Vereinfachungen an und erklären Sie, warum diese hier erlaubt sind.

[**Lösungen:** $V_{Zyl} : V_{Ell} = 1 : \sqrt{3}$ 57,735%]

9330 Treibach-Althofen, BORG Friesacher Straße 4
Mag. Wolfgang Rauchenwald

- 1a) Ein Schokolade-Osterei besteht aus der Form eines Kugelsegmentes vom Radius 5 cm, dem ein Paraboloid tangential aufgesetzt ist. Die Berührkreisebene liegt 3 cm entfernt vom Kugelmittelpunkt. Wie groß ist das Volumen?
- 1b) Die Volumsformeln für ei- und linsenförmige Drehellipsoide sind mittels Integralrechnung herzuleiten. Daraus ist dann die Volumsformel der Kugel abzuleiten.

[**Lösungen:** $V = 536,15 \text{ cm}^3$ $V_{\text{EI}} = \frac{4\pi}{3} ab^2$ $V_{\text{Linse}} = \frac{4\pi}{3} a^2 b$]

2. Friesach und Hirt liegen ca. auf einer gemeinsamen Meereshöhe von 560 m. 439 m über der in 846 m über dem Meer liegenden Lorenzenberg-Kirche schwebt ein Ballon. Der Ballonfahrer visiert die zwei Orte Friesach und Hirt unter den Tiefenwinkeln $\alpha = 11^\circ 15'$ und $\beta = 14^\circ 24'$ an. Die scheinbare Entfernung beider Orte beträgt $\gamma = 115^\circ 36'$.
- a) Berechne ihre wahre Entfernung.
- b) Welche Entfernung müßte der Ballon zurücklegen, um bei gleichmäßigem Sinkflug die Ortschaft Hirt zu erreichen?
- c) Unter welchem Winkel würde man auf einer Landkarte vom Standpunkt des Ballons aus die beiden Orte Hirt und Friesach sehen?

[**Lösungen:** a) 5 627,6 m b) 2 823,6 m c) $120,39^\circ$]

3. Auf zwei zueinander unter 60° geneigten, geradlinigen Straßen befinden sich die Fahrzeuge A und B. A ist vom Kreuzungspunkt 300 m entfernt und bewegt sich mit $v = 60 \text{ m/s}$ gleichförmig auf diesen zu. B startet gleichzeitig 100 m vom Kreuzungspunkt entfernt auf der anderen Bahn und beschleunigt gleichmäßig mit $a = 20 \text{ m/s}^2$ auf die Kreuzung zu. (Die Geschwindigkeitsvektoren schließen einen Winkel von 60° ein.) Nach welcher Zeit sind die beiden Fahrzeuge einander am nächsten? Wie groß ist diese Entfernung?

[**Lösungen:** $t = 3,72 \text{ s}$ $d_{\min} = 101,5 \text{ m}$]

- 4A Ein Prüfungsbogen enthält 7 Fragen mit je 4 Antwortmöglichkeiten, von denen genau eine richtig ist (Multiple-Choice-Test). Die Prüfung gilt als bestanden, wenn mehr als die Hälfte der Fragen richtig beantwortet ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß jemand, der die Antworten auf gut Glück angekreuzt,
- a) genau die für das Bestehen der Prüfung erforderliche Anzahl von Fragen richtig hat?
- b) die Prüfung besteht?
- c) Wie groß sind Erwartungswert und Standardabweichung bezüglich der Zufallsvariablen 'Zahl der richtigen Antworten'? Das Ergebnis ist zu diskutieren.

- 4B Der Unterschied zwischen Variation und Kombination ist zu erläutern. Welchen Zusammenhang gibt es zwischen Permutation und Variation?

[**Lösungen:** a) 0,0576 b) 0,0704 c) $E(X) = 1,688$ $\sigma = 1,18$]

9400 Wolfsberg, BORG Gartenstraße 1
Mag. Klaus Goriupp

1. Für jedes Dreieck ABC gilt: der Normalabstand des Umkreismittelpunktes U zu einer Seite des Dreiecks ist die Hälfte des Abstandes des Höhenschnittpunktes H zu dem der Seite gegenüberliegenden Eckpunkt.

Zeige die Gültigkeit dieses Satzes im Dreieck ABC $[A(-2/-8), B(4/4), C(-8/16)]$ für die Seite a und den Eckpunkt A.

[**Lösungen:** $U(-9/3)$ $H(12/6)$ $a: x+y=8$ $Ua=7 \cdot \sqrt{2}$ $AH=14 \cdot \sqrt{2}$]

2. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \frac{x^3 - 4x}{1 - x^2}$

- a) Diskutiere die Funktion (Definitionsbereich, Polstellen, Lücken, Asymptoten, Nullstelle, Extremstellen, Wendestellen, Graph).
b) Ermittle die Gleichungen der Tangenten an die Funktion in den Nullstellen sowie die Gleichung der Wendetangente.

[**Lösungen:** $a_{12}: x = \pm 1$ $a_3: y = -x$ $N_{12}(\pm 2/0)$ $N_3 = W(0/0)$ keine Extremstellen $t_{12}: y = -\frac{8}{3}x \pm \frac{16}{3}$ $t_w: y = -4x$]

3. Gegeben sind die Gleichungen einer Parabel par: $y^2 = \frac{9}{2}x$ und eines Kreises k: $x^2 + y^2 + 2x = 17$.

- a) Ermittle Mittelpunkt und Radius des Kreises sowie Brennpunkt und Leitlinie der Parabel.
b) In welchen Punkten schneiden sich Parabel und Kreis?
c) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an die Parabel und an den Kreis in diesen Schnittpunkten?
d) Kreis und Parabel begrenzen ein endliches Flächenstück, das um die x-Achse rotiert. Berechne das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers.

[**Lösungen:** a) $M(-1/0)$ $r = 3 \cdot \sqrt{2}$ $F(\frac{9}{8}/0)$ $l: x = -\frac{9}{8}$ b) $S_{12}(2/\pm 3)$ c) $t_{p12}: 3x \pm 2y = -6$ $t_{k12}: x \pm y = 5$ d) $V = 14,91\pi$]

4. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

- a) Diskutiere die Funktion (Definitionsbereich, Nullstellen, Extremstellen, Wendestellen) und zeichne den Graphen der Funktion.
b) Die Funktion f schließt mit der Funktion $g: x \rightarrow e^{-x}$ eine endliche Fläche ein. Berechne den Inhalt dieses Flächenstücks.

[**Lösungen:** a) $N = T(0/0)$ $H(2/0,54)$ $W_1(0,59/0,19)$ $W_2(3,41/0,38)$ b) $A = 1,472$]

9400 Wolfsberg, BORG Gartenstraße 1
Mag. Wolfgang Konrad

1. Durch einen Berg soll ein horizontal verlaufender Tunnel gegraben werden. Um seine Länge zu bestimmen, werden von einem benachbarten Berggipfel B aus - 117 m über dem Tunnelniveau gelegen - der Tunnelanfang A und das Tunnelende E ins Visier genommen. Zu A hin muß von B aus ein Tiefenwinkel $\alpha = 11,3^\circ$ eingestellt werden, zu E hin ein Tiefenwinkel $\beta = 9,7^\circ$. Zwischen den beiden Tiefenwinkelmessungen mußte das Zielfernrohr um einen Horizontalwinkel $\omega = 93,5^\circ$ geschwenkt werden.
Der Querschnitt der Tunnelröhre hat die Form eines Kreissegmentes mit einer Basisbreite von 12 m und einer maximalen Höhe von 5 m.

Wieviel Kubikmeter Aushubmaterial müssen beim Tunnelbau zumindest wegtransportiert werden?

[**Lösungen:** Tunnellänge: 927,52 m Aushub: 41 831 m³]

2. Berechne das Volumen der dreiseitigen Pyramide ABCS [A(3/-2/0), B(4/6/3), C(6/2/-1), S(5/1/13)], sowie den Winkel, unter dem die Seitenkante AS zur Grundfläche der Pyramide geneigt ist.

[**Lösungen:** $V = 45$ $\alpha = 41,85^\circ$]

3. In das durch die Gerade g: $x = 10$ von der Hyperbel hyp: $4x^2 - 25y^2 = 100$ abgeschnittene Segment soll das Rechteck von größtem Umfang eingeschrieben werden.

Flächeninhalt und Umfang dieses Rechtecks sind zu ermitteln (Skizze mit Hyperbelkonstruktion).

[**Lösungen:** $A = \frac{80}{9}$ $U_{\max} = 14$]

4. Ermittle für die Funktion $f: y = \frac{x+3}{\sqrt[3]{e^x}}$ die Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte.

Zeichne den Graphen im Intervall $[-4;5]$.

Die durch den Wendepunkt gelegte Parallele zur y-Achse, der Graph und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück, dessen Inhalt ermittelt werden soll.

[**Lösungen:** N(-3/0) H(0/3) W(3/2,21) $A = 14,53$]

9400 Wolfsberg, BORG Gartenstraße 1
Mag. Peter Reischl

1. Die Ellipse ell: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ geht durch die Punkte $P(-2/2 \cdot \sqrt{2})$ und $Q(4/-\sqrt{5})$. Die rechte große Halbachse der Ellipse ist Durchmesser eines Kreises.
- Fertigen Sie eine genaue Zeichnung an (Konstruktion).
 - Unter welchem Winkel schneiden einander Ellipse und Kreis?
 - Der außerhalb der Ellipse liegende Teil der Kreisfläche rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers?

[**Lösungen:** ell: $9x^2 + 36y^2 = 324$ k: $(x-3)^2 + y^2 = 9$ $S_1 (2/2 \cdot \sqrt{2})$ $S_2 (6/0)$ $\varphi = 150,5^\circ$ $V = 8\pi$]

2. Aus einem regelmäßigen Sechseck mit der Seitenlänge $a = 12$ cm sollen 6 kongruente gleichschenkelige Dreiecke herausgeschnitten werden, deren Grundlinien die Sechseckseiten sind. Der übrigbleibende Teil des ursprünglichen Sechseckes ist das Netz einer geraden, sechseckigen Pyramide.
- Welche Abmessungen hat die Pyramide, wenn ihr Volumen möglichst groß sein soll?
 - Wieviel Prozent des regelmäßigen Sechseckes machen die herausgeschnittenen Dreiecke (Abfall) aus?

[**Lösungen:** $x = \frac{48}{5 \cdot \sqrt{3}}$ $H = \frac{12 \cdot \sqrt{5}}{5}$ $V_{\max} = 285,547$ Abfall: 46,67%]

3. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4x \cdot e^{-\frac{1}{8}x^2}$.
- Diskutieren Sie $f(x)$ in $\mathbb{R}$.
 - Berechnen Sie den Flächeninhalt jenes Flächenstückes, das von der Funktion, der x-Achse und den Geraden $g_1: x = -4$ sowie $g_2: x = 4$ begrenzt wird.

[**Lösungen:** a: $y = 0$ $N = W_1 (0/0)$ $T(-2/-4,85)$ $H(2/4,85)$ $W_{23} (\pm 3,46/\pm 3,09)$ $A = 27,67$]

4. Die Dicke der auf einer Maschine hergestellten Metallplatten ist erfahrungsgemäß normalverteilt mit dem Erwartungswert 8 mm und der Standardabweichung 0,18 mm.
- Platten mit einer Dicke von weniger als 7,75 mm gelten als Ausschuß. Wieviel Prozent Ausschuß ist zu erwarten?
 - Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Dicke einer Platte um weniger als 0,25 mm vom Erwartungswert abweicht?
 - Wie wären die Toleranzgrenzen festzulegen, sodaß man höchstens 6% Ausschuß erhält?
 - Im Zuge der Qualitätskontrolle wurde die Dicke von 20 Platten überprüft. Man erhielt folgendes Meßergebnis (in mm):

7,75	7,80	8,30	8,05	8,15	7,90	8,05	7,95	8,20	7,80
7,90	8,15	7,95	8,20	7,75	8,30	7,90	7,80	8,05	8,15

Überprüfen Sie, wie genau Varianz und Standardabweichung mit den gegebenen Werten übereinstimmen?

[**Lösungen:** a) 8,23% b) 0,835 c) $a = 0,3385$ d) $m = 8,005$ $s = 0,179$]

9470 St. Paul, Stiftsgymnasium Lobisserplatz 7
Mag. Herbert Gorenzel

1. Für eine Menge von Funktionen gilt: $x \cdot f'(x) = \ln x$.
 - a) Bestimme die Gleichung der Funktion, die durch den Punkt $P(e/2)$ hindurchgeht. Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen im Intervall $[0,1;8]$.
 - b) Wie groß ist die von $f(x)$ und $g(x) = \ln x + \frac{3}{2}$ eingeschlossene Fläche?

[**Lösungen:** a) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x + \frac{3}{2}$ keine Nullstellen $T(1/\frac{3}{2})$ $W(e/2)$ b) $A = 2$]
2. Ende April 1986 ereignete sich in Tschernobyl die bisher schwerste Reaktorkatastrophe in der Geschichte der zivilen Nutzung der Atomenergie. Im radioaktiven Fallout, der auch Österreich verseuchte, waren mengenmäßig die Isotope Jod-131 und Cäsium-137 stark vertreten.
 - a) Leite das Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ her und stelle es für Cs-137 mit einer Halbwertszeit von 30 Jahren dar. Stelle das Zerfallsgesetz auch in der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ dar.
Das Zerfallsgesetz für Jod-131 lautet $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,08664t}$ (t in Tagen).
Berechne die Halbwertszeit für die tägliche prozentuelle Abnahme der Jodbelastung. Zeichne die zeitliche Abnahme für den Fall, daß zum Zeitpunkt $t = 0$ 10 mg Jod-131 vorhanden sind.
 - b) Berechne für Cs-137, wieviel Prozent der Anfangsmasse seit dem Urknall zerfallen sind (Stand April 1996) und wie lange es dauert, bis die Cäsiumbelastung auf 10% bzw. 1% zurückgeht.

[**Lösungen:** a) Cs-137: $N(t) = N_0 \cdot e^{-0,023105t} = N_0 \cdot 0,97716^t$ Jod-131: tägl. Abnahme um 8,3% b) 20,6% 99,66 199,32]
3. Der schleifenartige Teil des Graphen von $18y^2 = x \cdot (x-6)^2$ legt den Querschnitt eines drehsymmetrischen stromlinienförmigen „Tanks“ fest. Berechne von diesem „Tank“
 - a) das Volumen,
 - b) die Oberfläche,
 - c) den Umfang des Querschnitts,
 - d) die größte ebene Schnittfläche senkrecht zur Drehachse.

[**Lösungen:** a) 6π b) 12π c) $8 \cdot \sqrt{3}$ d) $\frac{16}{9}\pi$]
4. Von einer Maschine werden Bolzen hergestellt. Die Länge der Bolzen ist normalverteilt mit einem Mittelwert von 10 mm und einer Standardabweichung von 0,02 mm.
 - a) Nur Bolzen mit einer Länge zwischen 9,96 und 10,04 mm sind brauchbar. Wieviel Prozent sind Ausschuß? Verwende dazu die Formel von Simpson für $n = 2$.
 - b) Infolge Materialabnutzung verschiebt sich der Mittelwert auf 10,02 mm. Wieviel Prozent Ausschuß sind für die unter Punkt a) angegebenen Grenzen zu erwarten?
 - c) Bolzen, die über eine gewisse Maximallänge k hinausgehen, sind Ausschuß. Wie groß ist k , wenn der Ausschuß 1% beträgt und der Mittelwert wieder 10 mm ist?

[**Lösungen:** a) 4,56% b) 16% c) $k = 10,047$ mm]

1. Von einer Hyperbel in erster Hauptlage kennt man eine Asymptote $u_1: 4x - 3y = 0$ und einen Punkt $X(9/4 \cdot \sqrt{6})$; eine konfokale Ellipse in erster Hauptlage geht durch den Punkt $Y(-2/2 \cdot \sqrt{6})$.

Ermittle die Gleichungen beider Kegelschnitte.

Ein Stromlinienkörper entsteht dadurch, daß man diese Ellipse (Maße in cm) samt ihren Tangenten in den Schnittpunkten mit der Hyperbel, welche im 1. und 4. Quadranten liegen, um die x-Achse dreht. Ermittle die Gleichungen der Tangenten und berechne das Volumen des Drehkörpers sowie seine Masse, wenn er aus Eichenholz ($\rho = 0,8 \text{ kg/dm}^3$) gefertigt ist. Wie groß ist der Öffnungswinkel an der Spitze des Körpers? Fertige dazu eine Zeichnung der Querschnittsfläche des Stromlinienkörpers an.

[**Lösungen:** $h: 16x^2 - 9y^2 = 432$ $e: x^2 + 4y^2 = 100$ $V = 355,556\pi$ $m = 0,894 \text{ kg}$ $\alpha = 41,112^\circ$]

- 2a) Welche Beziehung besteht zwischen b und c in $y = x^4 + bx^3 + cx^2$, wenn diese Funktion nur einen Punkt mit $y'(x) = 0$ hat? Zeige, daß in diesem Punkt die Tangente nicht waagrecht ist.

- 2b) Eine Parabel 4. Ordnung mit $y = ax^4 + bx^3 + cx + d$ hat an der Stelle $x = -2$ die Wendetangente $y = 2x + 2$ und geht außerdem durch den Punkt $A(1/\frac{5}{8})$. Ermittle den Funktionsterm, diskutiere die Funktion (Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte) und zeichne den Graphen.

Diese Funktion wird im Punkt $B(2/6)$ von der Funktion $g^{-1}(x)$ geschnitten. $g^{-1}(x)$ ist die Umkehrfunktion von $g(x) = -\frac{1}{6}x^2 + 8$. Zeichne $g^{-1}(x)$ und berechne die Fläche, die $f(x)$, $g^{-1}(x)$ und die x-Achse im 1. Quadranten einschließen.

[**Lösungen:** a) $c = \frac{3}{8}b^2$ $y'(-\frac{b}{4}) = -\frac{b^3}{16}$ b) $f(x) = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3$ $N_1(-4/0)$ $N_2 = W_2(0/0)$ $T(-3/-\frac{27}{8})$ $W_1(-2/-2)$ $A = 26,8$]

3. Ein rotationssymmetrisches Werkstück hat die Form eines Zylinders mit auf der einen Seite aufgesetzter Halbkugel und auf der anderen Seite aufgesetztem Drehkegel. Die Radien von Zylinder, Halbkugel und Drehkegel sind gleich.

Der Öffnungswinkel des Drehkegels beträgt 90° , das Volumen des Werkstücks $125 \cdot \sqrt{2} \pi \text{ cm}^3$.

Wie ist das Werkstück zu dimensionieren, damit die Oberfläche minimal wird? Um wieviel % vergrößert sich die Oberfläche (bei gleichem Volumen), wenn die Radien und die Höhen der Körper gleich groß sind?

Die von einem Betrieb hergestellten Werkstücke haben einen Ausschußanteil von 6,5%. Sie werden in Kisten zu je 20 Stück an den Handel weitergegeben. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich in einer Kiste weniger als 3 schadhafte Werkstücke befinden? Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthalten höchstens 10 von 12 Kisten jeweils weniger als 3 schadhafte Werkstücke?

[**Lösungen:** $r = h_{\text{Kegel}} = 5$ $h_{\text{Zylinder}} = 2,071$ $O_{\min} = 75 \sqrt{2} \pi$ $O_2 = 337,51$ $P(X < 3) = 0,863$ $P(X \leq 10) = 0,505$]

4. Die Basiseckpunkte $A(-1/y_1/3)$, $B(-2/-2/0)$, $C(x_3/y_3/z_3)$, $D(x_4/y_4/1)$ einer rechteckigen Pyramide mit gleich langen Seitenkanten liegen in der Ebene $\varepsilon: 2x - 5y + 6z = d$, die Spitze S liegt auf der

Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Berechne die fehlenden Koordinaten und das Volumen der Pyramide. Welchen Winkel schließt die Grundfläche mit der Seitenfläche ADS ein? Wie lautet die Gleichung der Kugel durch $P(3/0/7)$ und $Q(4/-2/8)$, deren Mittelpunkt auf der Geraden g liegt? Wie weit ist der Mittelpunkt der Kugel von der Ebene ε entfernt? Zeige, daß die Streckensymmetralebene der Strecke PQ durch die Schnittgerade s der Tangentialebenen in P und Q hindurchgeht.

[**Lösungen:** $d = 6$ $A(-1/2/3)$ $C(4/-2/-2)$ $D(5/2/1)$ $S(3/-\frac{15}{4}/5)$ $\varphi = 67,14^\circ$ $k: (x+7)^2 + (y+5)^2 + (z-10)^2 = 134$ $M_\varepsilon = \sqrt{65}$]

9470 St. Paul, Stiftsgymnasium Lobisserplatz 7
Mag. Peter Unterluggauer

1. Ein Ball wird 45 m lotrecht in die Höhe geworfen und verliert nach jedem Aufprall am Boden einen bestimmten Prozentsatz an Höhe, bis er schließlich nach 30 Sekunden zur Ruhe kommt.

Die Steigzeit kann aus der Formel $h = \frac{gt^2}{2}$ ermittelt werden ($g = 10 \text{ m/s}^2$).

- Berechne die Quotienten q für die Folge der Steigzeiten und Q für die Folge der Steighöhen.
- Berechne den bis zum 10. Aufprall zurückgelegten Weg und die dafür benötigte Zeit.
- $x = v \cdot \cos(\alpha) \cdot t$, $y = v \cdot \sin(\alpha) \cdot t - \frac{gt^2}{2}$ ist die zeitabhängige Parameterdarstellung für den schiefen Wurf. Gib eine zeitunabhängige Darstellung der Wurfparabel in Abhängigkeit von α und v an.
- Wie müssen Abwurfgeschwindigkeit v und Abwurfwinkel α gewählt werden damit der Ball mit minimalem Energieaufwand durch ein in 20 m Höhe befindliches Fenster einer 5 m waagrecht entfernten Hauswand geworfen werden kann?

[**Lösungen:** a) $q = 0,8$ $Q = 0,64$ b) 247 m 26,78 s c) $y = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} \cdot x^2$ d) $v = 20,15 \text{ m/s}$ $\alpha = 82,87^\circ$]

2. Die Lösungen der Gleichung $z^4 = -527 - 336i$ bilden die Eckpunkte eines Quadrates.

- Gib diese Lösungen in Binomialform an.
- Durch eine Drehstreckung um den Punkt $m = 1 + 2i$ wird die im 1. Quadranten befindliche Wurzel auf den Punkt $4 + 3i$ abgebildet. Berechne den komplexen Drehstreckungsfaktor sowie den Drehwinkel und den Betrag des Streckungsfaktors.
- Berechne die Bildpunkte von zwei weiteren Wurzeln.
- Fertige eine Zeichnung von den beiden Quadraten an und ermittle daraus den Streckungsfaktor und den Drehwinkel.

[**Lösungen:** a) $3+4i$ $-4+3i$ $-3-4i$ $4-3i$ b) $1-0,5i$ $-26,565^\circ$ $1,118$ c) $-3,5+5,5i$ $-6-2i$]

3. Gegeben ist das Dreieck $A(-7/0)$, $B(3/-10)$, $C(9/8)$.

- Zeichne das Dreieck, konstruiere den Höhenschnittpunkt H und den Umkreismittelpunkt U und spiegle den Höhenschnittpunkt an der Seite c (Spiegelbild H'_c).
- Berechne H und U .
- Berechne H'_c und zeige, daß dieser Punkt auf dem Umkreis liegt.

[**Lösungen:** $U(5/0)$ $H(-1/-2)$ $H'_c(-5/-6)$]

4. Gegeben ist die Kurve $9y^2 = (x-4)^2 \cdot (x-1)$.

- Berechne die relativen Extrema der Kurve und skizziere die Kurve.
- Berechne den Inhalt der von der Kurve eingeschlossenen Fläche.
- Berechne den Umfang dieser Fläche.
- Berechne den Winkel, unter dem sich die Kurve schneidet.

[**Lösungen:** $E_{12}(2 \pm \frac{2}{3})$ $A = 1,386$ $U = 4 \cdot \sqrt{3}$ $\alpha = 60^\circ$]

1. Gegeben sind die Polynomfunktionen $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 32)$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x - 10)$.

- a) Diskutiere die beiden Funktionen (Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte, Verhalten im Unendlichen, Wendetangente, Definitionsmenge, Stetigkeit) und zeichne die Graphen im Intervall $[-3;6]$.
 b) Berechne den Inhalt des von f und g eingeschlossenen Flächenstückes.

[**Lösungen:** f: $N_1(-2/0)$ $N_2 = T(4/0)$ $H(0/4)$ $W(2/2)$ $t_w: 3x+2y=10$ g: $N_1(-2/0)$ $N_2(5/0)$ $T(\frac{3}{2} / -6\frac{1}{8})$ $S(6/4)$

$$A = 42\frac{2}{3}]$$

2. Nehmen wir an, es gibt irgendwo eine Stadt mit drei Gymnasien G_1, G_2, G_3 und zwei Dörfer D_1 und D_2 außerhalb der Stadt. Aus dem ersten Dorf wollen 800 Schüler ins Gymnasium gehen, aus dem zweiten Dorf 700 Schüler. G_1 kann höchstens 500 Schüler aufnehmen, G_2 höchstens 400, G_3 höchstens 600. Die Buskosten betragen pro Schüler und Jahr:

von D_1 zu G_1 : S 1 100,- von D_1 zu G_2 : S 1 200,- von D_1 zu G_3 : S 700,-
 von D_2 zu G_1 : S 1 000,- von D_2 zu G_2 : S 900,- von D_2 zu G_3 : S 800,-

- a) Gib zunächst grafisch und rechnerisch alle „Eckpunktlösungen“ an, wie man die Schüler auf die drei Schulen verteilen könnte.
 b) Wie müßte die Verteilung aussehen, damit im Sinne des von unserer Regierung geschnürten Sparpaketes die Schülertransportkosten minimal ausfallen?
 c) Darstellung des optimierten Ergebnisses in einem Verteilungsplan.

[**Lösungen:** Verteilungsplan: $\begin{bmatrix} 200 & 0 & 600 \\ 300 & 400 & 0 \end{bmatrix}$ $K_{\min} = S 1\,300\,000,-$]

3. Werden von einem Punkt P, der auf dem Umkreis eines Dreiecks ABC liegt, die Lote auf die Seiten des Dreiecks errichtet, so liegen die Fußpunkte F_a, F_b, F_c dieser Lote auf einer Geraden, der sogenannten Wallace-Geraden.

- a) Beweise diese Behauptung konstruktiv und rechnerisch für folgende Koordinaten:
 $A(2/2), B(-2/6), C(5/-7); P(-3/-3) \in K_U$.
 b) Ermittle ferner die Koordinaten des Umkreismittelpunktes und die Kreisgleichung.

[**Lösungen:** a) $F_a(-\frac{17}{5} / -\frac{29}{5})$ $F_b(3/-1)$ $F_c(-1/-4)$ $g_w: 3x - 4y = 13$ b) $K_U: (x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$]

4. Gegeben ist ein Drehzylinder mit Volumen V.

- a) Wie muß sich der Durchmesser des Zylinders zur Zylinderhöhe verhalten, wenn die Zylinderoberfläche ein Extremwert sein soll?
 b) Untersuche, ob es sich bei diesem Extremwert um ein Maximum oder Minimum handelt.
 c) Wie verhält sich das Zylindervolumen zu einer eingeschriebenen Kugel, die den Zylindermantel von innen berührt?
 d) Lege eine gute Skizze an.

[**Lösungen:** a) $d = h = 3\sqrt{\frac{4V}{\pi}}$ b) Minimum c) $V_Z : V_K = 3 : 2$]

1. Gegeben sind die Polynomfunktionen $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 6x^2 + 32)$ und $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 3x - 10)$.
- Diskutiere die beiden Funktionen und zeichne die Graphen in $[-3;6]$. Wie lautet die Gleichung der Wendetangente?
 - Berechne den Inhalt des von f und g eingeschlossenen Flächenstückes.

[**Lösungen:** $f: N_1(-2/0) N_2 = T(4/0) H(0/4) W(2/2) t_W: 3x+2y=10$ $g: N_1(-2/0) N_2(5/0) T(\frac{3}{2} / -6\frac{1}{8}) S(6/4)$

$$A = 42\frac{2}{3}]$$

2. Löse folgende Aufgabe mittels linearer Optimierung (grafisch und rechnerisch):
 Aus dem Dorf D_1 wollen 800 Schüler ins Gymnasium, aus dem Dorf D_2 700. Zur Auswahl stehen drei Gymnasien G_1 , G_2 und G_3 . G_1 kann höchstens 500 Schüler aufnehmen, G_2 höchstens 400, G_3 höchstens 600. Die Buskosten betragen pro Schüler und Jahr:

von D_1 zu G_1 : S 1 100,- von D_1 zu G_2 : S 1 200,- von D_1 zu G_3 : S 700,-
 von D_2 zu G_1 : S 1 000,- von D_2 zu G_2 : S 900,- von D_2 zu G_3 : S 800,-

Wie muß die Verteilung der Schüler auf die Gymnasien G_1 , G_2 und G_3 erfolgen, damit die Gesamt-Buskosten minimal sind? Gib den Verteilungsplan an.

[**Lösungen:** Verteilungsplan: $\begin{bmatrix} 200 & 0 & 600 \\ 300 & 400 & 0 \end{bmatrix}$ $K_{\min} = S 1 300 000,-$]

3. Von einem Schiff erblickt man zwei Leuchttürme A und B unter den Winkeln $\alpha = rw 258,2^\circ$ und $\beta = rw 128,7^\circ$. Aus der Seekarte entnimmt man, daß zwischen A und B ein geradliniges, 5,3 sm langes Ufer mit der Richtung $\varepsilon = rw 109^\circ$ liegt.
- Welche Entfernung hat das Schiff vom Ufer?
 - Das Schiff bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 12 Knoten in Richtung $rw 106,5^\circ$. Wie weit ist es nach 30 Minuten von B entfernt?
 - Unter welchem Winkel (rw) sieht man dann B?

[**Lösungen:** a) 1,186 sm b) 3,04 sm c) $260,58^\circ$]

4. Der Schnittpunkt der beiden Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $h: X = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist die Spitze

eines Tetraeders mit der Grundfläche ABC: $A(6/0/6)$, $B(2/-4/2)$, $C(0/-2/10)$.

- Berechne die Koordinaten der Spitze S, die Höhe h in Parameterform sowie den Fußpunkt F der Höhe.
- Spiegle S an der Grundfläche des Tetraeders und berechne das Volumen des entstandenen Doppeltetraeders.
- Berechne die Winkel zwischen h und der xy -Ebene sowie zwischen den Flächen ABC und ABS.

[**Lösungen:** a) $S(-2/8/0)$ $h: X = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ $F(4/-2/4)$ b) $V = 202\frac{2}{3}$ c) $\alpha = 18,93^\circ$ $\beta = 90^\circ$]

1. Diskutiere die Funktion $f: x \rightarrow \frac{4x^2}{x^2 + 3}$ und zeichne den Graphen im Intervall $[-7;7]$.

Berechne weiters den Inhalt der Fläche, den die Wendetangenten mit der Asymptoten des Graphen einschließen.

[**Lösungen:** $a: y = 4$ $N = T(0/0)$ $W_1 (-1/1)$ $W_2 (1/1)$ $A = 13,5$]

2. Einem Drehzylinder (r,h) soll die volumskleinste regelmäßige quadratische Pyramide so umgeschrieben werden, daß deren Mantelflächen die Deckfläche des Zylinders berühren und die Basisfläche des Zylinders in der Basisfläche der Pyramide steht.

[**Lösungen:** $a = 3r$ $H = 3h$ $V_{\min} = 9r^2h$]

3. Gegeben: Parabel $p: y^2 = 12x$; Gerade $g: y = 2x - 12$.
In den Schnittpunkten T_1 und T_2 der Parabel mit der Geraden g sind die Tangenten t_1 und t_2 zu errichten. Eine dritte Parabeltangente t_3 wird parallel zu g gelegt. Die drei Tangenten t_1 , t_2 , t_3 bilden ein Dreieck ABC. Berechne die Fläche dieses Dreiecks.

[**Lösungen:** $T_1 (12/12)$ $T_2 (3/-6)$ $t_1: x-2y = -12$ $t_2: x+y = -3$ $t_3: 2x-y = -\frac{3}{2}$ $A = \frac{243}{8}$]

4. Der Gewinn bei einem Modell A beträgt S 1 400,- , bei B S 800,- . Zur Produktion braucht man drei Maschinen M_1 , M_2 und M_3 . M_1 läuft maximal 45 000 ZE, M_2 maximal 30 000 ZE und M_3 maximal 20 000 ZE (ZE = Zeiteinheiten im Monat).

Modell A durchläuft M_1 in 400, M_2 in 300 und M_3 in 100 ZE.

Modell B durchläuft M_1 in 300, M_2 in 100 und M_3 in 200 ZE.

Gesucht: Lösung mit linearer Optimierung. Produktionsplan für maximalen Gewinn. Berechnung der „Eckpunktlösungen“ sowie Interpretation des optimalen Ergebnisses.

[**Lösungen:** [90 30] $G_{\max} = S 150 000,-$]

- 1a) Von einer Parabel (Funktion zweiten Grades der Form $y = ax^2 + bx + c$) kennt man den Punkt $P(9/2)$, den Punkt $Q(3/-1)$ und mit $\alpha = 135^\circ$ den Steigungswinkel der Tangente im Punkt Q . Erstellen Sie die Gleichung dieser Parabel und zeigen Sie die Übereinstimmung mit

$$y = \left(\frac{x-5}{2} \right)^2 - 2.$$

Zeichnen Sie das Schaubild dieser Funktion und der Geraden $2y = -x + 5$ und ermitteln Sie die Schnittpunkte A und B der Geraden mit der Parabel.

- 1b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von der Geraden und der Parabel bestimmten Segments mit Hilfe

- der Integralrechnung;
- eines Satzes von Archimedes (287 - 212 v. Chr.): AB ist eine Sehne der Parabel und H der Halbierungspunkt dieser Sehne. Zieht man durch H eine Parallele zur Parabelachse (= y-Achse) und schneidet sie mit der Parabel, erhält man den Punkt C. Der Flächeninhalt des Parabelsegments ist dann genau $\frac{4}{3}$ des Flächeninhalts des Dreiecks ABC.

[**Lösungen:** a) p: $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{17}{4}$ A(1/2) B(7/-1) b) A = 9]

- 2a) Zeigen Sie, daß zylindrische Konservendosen mit einem Volumen von 500 cm^3 den kleinsten Materialbedarf haben, wenn der Durchmesser gleich groß ist wie die Zylinderhöhe (Problem der Müllminimierung).

- 2b) Diese Dosen werden auf einer Maschine gefüllt. Die Roheinwaage ist normalverteilt mit dem Sollwert $\mu = 250 \text{ g}$ und der Standardabweichung $\sigma = 15 \text{ g}$.

- Wieviel Prozent der Dosen haben weniger als 240 g Roheinwaage?
- Wie groß müßte μ (bei gleichbleibendem σ) sein, damit nur 5% dieser Dosen weniger als 240 g Roheinwaage enthalten?
- Welche symmetrische Abweichung vom Mittelwert kann man tolerieren, um nicht mehr als 5% Ausschuß zu haben?

[**Lösungen:** a) $d = h = 3\sqrt{\frac{2000}{\pi}}$ b) $P(X \leq 240) = 0,251$ $\bar{\mu} \approx 265 \text{ g}$ Toleranz: 220 .. 280 g]

3. Kugel k: $M \in g [I(3/2/5), II(5/4/9)]$; $A(1/-3/-3) \in k$; $B(5/3/1) \in k$.

- a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Kugel. Geben Sie die Tangentialebenen in A und B an und ermitteln Sie die Schnittgerade in Parameterform.
- b) Die Ebene $\varepsilon: 2x - 2y - z = 10$ schneidet die Kugel. Berechnen Sie Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises. Schreiben Sie der Kugel zwei Kegel derart ein, daß ihre Grundfläche der Schnittkreis von $k \cap \varepsilon$ ist. Berechnen Sie ihre Höhen und das Verhältnis der Volumina ganzzahlig.

[**Lösungen:** a) $M(1/0/1)$ $r = 5$ s: $X = \begin{pmatrix} 12,5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) $M(3/-2/0)$ $r = 4$ $V_1 : V_2 = 1 : 4$]

4. Ein Grundstück (allgemeines Viereck ABCD) ist durch drei Seiten und zwei Winkel gegeben: $AB = a = 63,4 \text{ m}$; $BC = b = 62,0 \text{ m}$; $DA = d = 15,3 \text{ m}$; $\alpha = 87,3^\circ$; $\beta = 115,6^\circ$.

- a) Berechnen Sie die Länge der fehlenden Seite und die fehlenden Winkel.
- b) Durch eine durch A gehende Gerade g soll das Grundstück in zwei flächengleiche Parzellen geteilt werden. Berechnen Sie, wie weit dieser Schnittpunkt von C entfernt ist.
Eine Parzelle wird um S 400 000,- angeboten. Ist dieses Angebot günstig, wenn der ortsübliche Preis S 350,- / m^2 beträgt?

[**Lösungen:** a) $c = 98,3 \text{ m}$ $\gamma = 39,9^\circ$ $\delta = 117,2^\circ$ b) $x = 19,3 \text{ m}$ S 27 175 unter dem ortsüblichen Preis]

9560 Feldkirchen, BRG Flurweg 3 Mag. Martin Maltschnig

1. Bestimme die Gleichung der Kugel k_1 , die durch den Punkt $P(-6/8/9)$ geht und die Ebene $\varepsilon: [A(4/4/11), B(8/2/8), C(6/8/7)]$ im Punkt A berührt.

Ermittle die Schnittpunkte der durch die Punkte $P_1(1/10/-4)$ und $P_2(5/-10/4)$ verlaufenden Geraden h mit der Kugel k_1 und berechne das Maß des Winkels, den die Tangentialebenen in den Schnittpunkten miteinander einschließen.

Ermittle die Gleichung der Kugel k_2 mit Mittelpunkt $M_2(8/-9/10)$, die k_1 von außen berührt, sowie die Gleichung der gemeinsamen Tangentialebene der beiden Kugeln.

[**Lösungen:** $k_1: (x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 = 81$ $S_1(4/-5/2)$ $S_2(2/5/-2)$ $\varphi = 105,03^\circ$ $k_2: (x-8)^2 + (y+9)^2 + (z-10)^2 = 36$
 $\tau: 2x - 2y + z = 26$]

2. Eine Ellipse mit Nebenscheitel $C(0,6)$ schneidet eine konfokale Hyperbel im Punkt $P(6/3)$.

Ermittle die Gleichungen der beiden Kegelschnitte und zeige, daß sie einander rechtwinkelig schneiden.

Schreibe dem Ellipsoid, das durch Rotation der Ellipse um die x-Achse entsteht, den volumsgrößten coaxialen Drehzylinder ein.

Das von der Hyperbeltangente in P, der y-Achse und dem Ellipsenbogen zwischen C und P begrenzte Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.

[**Lösungen:** $e: 3x^2 + 4y^2 = 144$ $h: x^2 - 3y^2 = 9$ Zylinder: $r = 2 \cdot \sqrt{6}$ $h = 8$ $V_{\max} = 192\pi$ Drehkörper: $V = 108\pi$]

3. Ein Gummiball fällt aus 1 m Höhe, steigt dann 0,9 m wieder auf, beim zweiten Mal steigt er nur mehr 0,81 m usw., sodaß eine geometrische Folge entsteht.

Welchen Weg legt der Ball insgesamt zurück?

Wie lange dauert der Vorgang? (Fallzeit = Steigzeit = $\sqrt{\frac{2h}{g}}$; $g = 9,81 \text{ m/s}^2$)

Wie oft ist der Ball in den ersten fünf Sekunden aufgesprungen?

Berechne die maximale Steighöhe nach fünf Sekunden.

Welchen Weg hat der Ball nach fünf Sekunden zurückgelegt?

[**Lösungen:** a) 19 m b) 17,15 s c) 7 d) 48 cm e) 9,47 m]

4. Laut einer Studie des Bundesministeriums für Umwelt werden 97% der verkauften Milchflaschen zurückgegeben und wiederverwendet. Der Rest wird weggeworfen, zerbricht oder muß wegen Beschädigung ausgeschieden werden.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß eine Milchflasche genau 5 mal bzw. mindestens 5 mal zurückgebracht wird? Begründe das Rechenergebnis und verallgemeinere auf n mal.

Aus obigen Grund müssen die Molkereien jeweils 3% der abgefüllten Milch in neuerzeugten Flaschen ausliefern, die jedoch zufällig unter die alten gemischt werden. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit, in einer Kiste mit 12 Milchflaschen keine, mindestens zwei bzw. höchstens zwei neue Milchflaschen zu finden?

Wie viele Flaschen muß man kaufen, um mit 90% Wahrscheinlichkeit mindestens eine neue Flasche zu erhalten?

Nach durchschnittlich wie vielen Umläufen sind von 100 Flaschen nur mehr 20 Flaschen vorhanden?

[**Lösungen:** a) $P(5)=0,026=0,97^n \cdot 0,03$ $P(\geq 5)=0,859=0,97^n$ b) $P(0)=0,694$ $P(\geq 2)=0,049$ $P(\leq 2)=0,995$ c) 76 d) 53]

9560 Feldkirchen, BRG Flurweg 3
Mag. Ingrid Schicher

1. Von einem Punkt einer horizontalen Ebene aus erscheint die Spitze eines ersten Berges unter einem Höhenwinkel $\alpha = 10,2^\circ$. Die erste Bergspitze wird von einer genau dahinterliegenden zweiten Bergspitze überragt. Der zur zweiten Bergspitze gemessene Höhenwinkel ist um $3,1^\circ$ größer. Von einem 3 km näher beim ersten Berg liegenden Punkt erscheinen beide Gipfel in einer Linie unter einem Winkel $\gamma = 17,3^\circ$.

Berechne die Höhe beider Berge auf Meter genau, wenn die Ebene, von der aus die Vermessungen durchgeführt wurde, 357 m über dem Meeresspiegel liegt und eine Instrumentenhöhe von 1,4 m zu berücksichtigen ist.

Wie groß ist die Entfernung der beiden Gipfel in einer Karte im Maßstab 1 : 50 000?

[**Lösungen:** $h_1 = 1\,637\text{ m}$ $h_2 = 3\,301\text{ m}$ $d = 10,68\text{ cm}$]

2. Gegeben sind die Ellipse $x^2 + 4y^2 = 64$ und die Hyperbel $x^2 - y^2 = 4$. Der rechte Hyperbelast teilt die Ellipse in 2 Flächen.

- a) Die kleinere Ellipsenfläche rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen dieses Rotationskörpers.
b) In die größere Ellipsenfläche ist ein gleichschenkeliges Dreieck so einzuschreiben, daß bei Rotation um die x-Achse ein Drehkegel mit maximalem Volumen entsteht. Die Spitze des Dreiecks liegt im rechten Hauptscheitel der Hyperbel. Berechne das Volumen und die Oberfläche dieses Drehkegels.

[**Lösungen:** a) $V = \frac{112}{3}\pi$ b) $r = 2\sqrt{3}$ $h = 6$ $V = 24\pi$ $O = 36\pi$]

3. Der Graph der Funktion $f: y = \frac{ax}{x^2 + b}$ verläuft durch den Punkt $P(4/\frac{4}{3})$ und hat an der Stelle $x = 0$ die Steigung -1.

- a) Ermittle die Funktionsgleichung und zeige die Übereinstimmung mit $y = \frac{4x}{x^2 - 4}$.
b) Diskutiere die Funktion f und zeichne den Graphen im Intervall [-6;6].
c) Berechne den Inhalt jenes Flächenstücks, das vom Funktionsgraphen, den Geraden $g_1: x = 3$ und $g_2: x = 5$ sowie der x-Achse begrenzt wird.

[**Lösungen:** a) $y = \frac{4x}{x^2 - 4}$ b) $a_{12}: x = \pm 2$ $a_3: y = 0$ $N = W(0/0)$ keine Extremstellen c) $A = 2,87$]

4. Eine Getränkeabfüllanlage ist auf eine Abfüllmenge von $\mu = 0,5$ Liter eingestellt. Ungeklärte Fehler verursachen Abweichungen von $\sigma = 2,5\text{ cm}^3$. Betrachte die Abfüllmenge als normalverteilte Zufallsvariable und berechne den Ausschuß, wenn folgende Bedingungen gelten:

- a) Die Abfüllmenge darf höchstens 505 cm^3 betragen.
b) Die Abfüllmenge darf nicht unter 496 cm^3 sinken.
c) Die Abfüllmenge muß zwischen 497 cm^3 und 503 cm^3 liegen.
d) Welche Toleranzgrenzen muß man setzen, wenn der Ausschuß höchstens 3% betragen darf?

[**Lösungen:** a) 0,023 b) 0,055 c) 0,230 d) 494,575 .. 505,425]

9620 Hermagor, BORG 10.-Oktober-Straße 9
Mag. Gerald Flaschberger

1. Geg.: Dreieck $A(-13/3)$, $B(3/-1)$, $C(-2/14)$.
Berechne den Schwerpunkt, den Umkreismittelpunkt und den Höhenschnittpunkt. Zeige, daß diese drei Punkte auf einer Geraden liegen. Gib die Gleichung dieser Geraden an.

[Lösungen: $S(-4/\frac{16}{3})$ $U(-4/5)$ $H(-4/6)$ e: $x = -4$]

- 2a) Berechne die Definitionsmenge $D_f \subseteq \mathbb{R}$ und die Nullstellen der Funktion $f(x) = \frac{4x^2 + 11x + 3}{x^3 + 2x^2 - x - 2}$.

- 2b) Zeige (ohne Taschenrechner), daß die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)$ im Integrationsbereich $x_1 = 2$ bis $x_2 = 4$ den Wert $\ln 50$ hat.

[Lösungen: $N_1 (-2,443/0)$ $N_2 (-0,307/0)$]

3. Von einem viereckigen Grundstück ABCD kennt man die Seiten $AB = a = 200$ m, $BC = b = 160$ m, $CD = c = 320$ m und $DA = d = 120$ m sowie den Winkel $DAB = \alpha = 124,32^\circ$.
Konstruiere das Viereck im Maßstab 1 : 2500.
Die Diagonale $AC = e$ teilt das Grundstück in zwei Teile. Berechne deren Flächen.

[Lösungen: $A_1 = 15\,268 \text{ m}^2$ $A_2 = 17\,446 \text{ m}^2$]

4. Ein Sportler hat beim Hochsprung eine normalverteilte Leistung:

$\frac{2}{3}$ seiner Sprünge sind über 200 cm, $\frac{1}{4}$ sogar über 210 cm.

- a) Berechne den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ seiner Leistungsverteilung.
b) Für die Olympiadequalifikation braucht er einen Sprung über 220 cm; er hat dazu drei Versuche. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird er die Qualifikation schaffen?
c) Wie viele Versuche müßte er haben, um die Qualifikation mit mindestens 75%-iger Wahrscheinlichkeit zu erreichen?

[Lösungen: a) $\mu = 203,87 \text{ cm}$ $\sigma = 9 \text{ cm}$ b) 0,106 c) 38]

Schriftliche Reifeprüfung mit DERIVE

1. Aus einem quadratischen Stück Pappe mit der Seitenlänge a soll die volumsgrößte quadratische Pyramide hergestellt werden. Die Herstellungsweise ist aus nachstehenden Figuren zu ersehen:

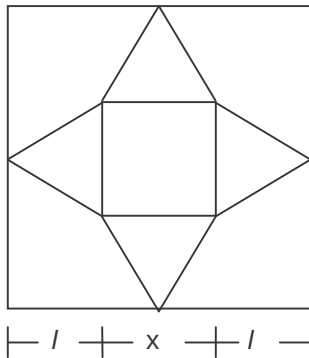


Fig. 1

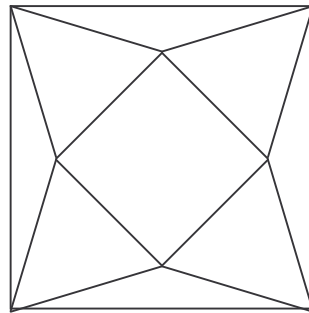


Fig. 2

Zeige: 1. Zielfunktion $V(x) = \frac{1}{3}x^2 \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{ax}{2}}$

Zeige, daß sich die Volumina um den Faktor $\sqrt{8}$ unterscheiden. Erkläre, wie dieser Faktor zustandekommt.

Warum wird allgemein bei der Extremwertbestimmung die 1. Ableitung Null gesetzt?

[Lösungen: Fig. 1: $x = \frac{2}{5}a \Rightarrow V_{\max} = \frac{2}{75 \cdot \sqrt{5}}a^3$ Fig. 2: $x = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{5}a \Rightarrow V_{\max} = \frac{4 \cdot \sqrt{2}}{75 \cdot \sqrt{5}}a^3$]

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{4}{x^2} - 1$.

- Berechne die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse.
- Bestimme die Gleichung desjenigen Kreises, der den Graph von f in den Schnittpunkten mit der x-Achse berührt.
- Die Gerade $y = 3$ begrenzt mit $f(x)$ und dem Kreis eine Figur, deren Achsenschnitt eine Glühbirne sein könnte. Zeichne die begrenzenden Linien dieser Glühbirne (DERIVE).
- Berechne das Volumen der Glühbirne.
- Ebenso die Mantelfläche des Rotationskörpers. Wieviel Glas ist für die Erzeugung der Glühbirne notwendig, wenn das Glas 0,8 mm dick ist?

[Lösungen: $N_{12} (\pm 2/0)$ k: $x^2 + (y+2)^2 = 8$ $V = 106,699$ $M = 113,155$ Materialbedarf: 9,052]

3. Eine astronomische Vereinigung sieht ihren Satelliten UHU 17 durch einen unbekannten Flugkörper (UFO) gefährdet. UHU 17 beschreibt im kartesischen Koordinatensystem (Einheit = 2 000 km) eine Ellipse (Hauptlage) mit der numerischen Exzentrizität $\frac{1}{3}$ und dem Brennpunkt $F(2/0)$. Für den unbekannten Flugkörper konnte die Bahngleichung (Kegelschnitt) $x^2 - 2xy + y^2 + 24x - 30y + 156 = 0$ ausgemacht werden. Der Erdmittelpunkt fällt mit dem Brennpunkt der Ellipse zusammen; der Radius beträgt 3,2 Einheiten.
- Ermittle die Gleichung der Ellipse (Satellit) und des Kreises (Erde).
 - Stelle alle 3 Kegelschnitte grafisch dar.
 - Bestimme das Apogäum (erdfernster Punkt) des Satelliten.

- d) Berechne den ersten Kollisionspunkt von UHU 17 (Bewegung im Gegenuhrzeigersinn) mit dem unbekannten Flugkörper (Bewegung im Uhrzeigersinn).
 e) Ermittle den kürzesten Abstand dieses Punktes von der Erdoberfläche.
 f) Identifiziere rechnerisch die Flugbahn des UFOs.

[**Lösungen:** $e: 32x^2 + 36y^2 = 1152$ $k: (x-2)^2 + y^2 = 3,2^2$ Apogäum: 9 600 km Kollisionspunkte: $K_1 (-2,56/5,116)$
 $K_2 (-3,667/4,478)$ $d_{\min} = 7\,306,46$ km Flugbahn: Parabel]

4. Mit zwei verschiedenen reellen Zahlen u, v ($u \neq v$) und einer 3. Einheitswurzel $e = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ sind in der Gaußschen Zahlenebene die drei Punkte

$$z_1 = \frac{v-u}{2} + i \cdot 0, \quad z_2 = -v \cdot (1+e) - (u+v) \cdot \frac{e^2}{2} \quad \text{und} \quad z_3 = -v \cdot (1+e^2) - (u+v) \cdot \frac{e^4}{2} \quad \text{gegeben.}$$

- a) Stelle z_2 und z_3 in der algebraischen Summenschreibweise dar; zeichne diese 3 Zahlen für $u = 5$ und $v = 3$ und verbinde sie zu einem Dreieck.
 b) Berechne die Seitenlängen und Innenwinkel des Dreiecks für allgemeines u und v . Um welches Dreieck handelt es sich?
 c) Zeige, daß das Dreieck für $u = 5$ und $v = 3$ auf dem Einheitskreis liegt.

Nach Gauß gelten für die Fläche aller Dreiecke des Einheitskreises folgende Beziehungen:

$$F = \frac{z_2 - z_3}{z_1} \cdot \frac{z_3 - z_1}{z_2} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_3} \cdot \frac{i}{4} \quad \text{bzw.} \quad F = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 1 \\ \cos \beta & \sin \beta & 1 \\ \cos \gamma & \sin \gamma & 1 \end{vmatrix}$$

wobei α, β, γ die Polarwinkel der Dreieckspunkte im Bogenmaß sind.

- d) Zeige die Gültigkeit dieser Beziehungen für obiges Dreieck ($u = 5$ und $v = 3$) und für das aus den 3 Einheitswurzeln gebildete Dreieck.

[**Lösungen:** gleichseitiges Dreieck am Einheitskreis $A = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}$]

9800 Spittal an der Drau, BG Zernattostraße 10
Dr. Wolfgang Gmeiner

1. Die Funktion $y = \cos x$ ist auf $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ gegeben. Man lege durch die beiden Nullstellen und den Scheitel eine quadratische Parabel der Form $y = ax^2 + bx + c$.

Wie lautet die Gleichung dieser Parabel?

Welche der beiden Kurven hat zwischen sich und der x-Achse die größere Fläche?

[**Lösungen:** $p: y = -\frac{4}{\pi^2}x^2 + 1$ $A_{\cos x} = 2$ $A_p = \frac{2\pi}{3}$]

2. Auf der Kurve $h: y = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}$, liegen die Punkte $P(\frac{1}{2}/y)$ und $Q(x/\frac{1}{3})$.

Bestimme jene Punkte R auf h, sodaß das Dreieck PQR maximale bzw. minimale Fläche hat.

[**Lösungen:** $R_{\max} = (\frac{\sqrt{6}}{2} / \frac{2}{\sqrt{6}})$ $R_{\min} = (-\frac{\sqrt{6}}{2} / -\frac{2}{\sqrt{6}})$]

3. Durch die drei Punkte $P(2/1/6)$, $Q(-2/3/0)$, $R(7/-4/4)$ gehen drei parallele Gerade g, h, i, welche normal auf die beiden parallelen Ebenen $2x - 2y + z = -1$, $2x - 2y + z = 17$ stehen. Diese drei Geraden sollen mit den beiden Ebenen geschnitten werden. Berechne die Ecken des bei diesem Schnitt entstehenden geraden dreiseitigen Prismas sowie dessen Volumen.

[**Lösungen:** $A(0/3/5)$ $\bar{A}(4/-1/7)$ $B(0/1/1)$ $\bar{B}(4/-3/3)$ $C(1/2/1)$ $\bar{C}(5/-2/3)$ $V = 18$]

4. An das Dreieck ABC $[A(-3/-1), B(3/1), C(-1/3)]$ werden folgende Kreise gelegt:

k_a geht durch die Punkte A und B und berührt die Seite BC,

k_b geht durch die Punkte B und C und berührt die Seite CA,

k_c geht durch die Punkte C und A und berührt die Seite AB.

Man zeige, daß sich diese drei Kreise in einem Punkt schneiden und ermittle die Koordinaten dieses Punktes.

[**Lösungen:** $k_a: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 20$ $k_b: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ $k_c: (x+4)^2 + (y-2)^2 = 10$ $P(-1/1)$]

9800 Spittal an der Drau, BG Zernattostraße 10
Mag. Matthäus Melinz

1. $A(3/3/-1)$ ist Eckpunkt der Grundfläche einer dreiseitigen Pyramide. Die Höhe $h = 9$ liegt auf der

Trägergeraden $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

- Bestimme die Ebene ε , in der die Grundfläche ABC liegt, und bestimme die Spitze S der Pyramide (zwei Lösungen für S).
- Für den Eckpunkt B gilt $B(x/-9/1)$. Bestimme B. Der Eckpunkt C ist der Berührungspunkt der Kugel $k: x^2 + y^2 + z^2 - 20x + 4y - 10z + 48 = 0$ mit der Grundebene ε . Bestimme C.
- Bestimme das Volumen der Pyramide.
- Berechne den Winkel, den die Grundfläche mit der Fläche ABS einschließt.

[**Lösungen:** $\varepsilon: 4x - y + 8z = 1$ $S_1 (2/6/10)$ $S_2 (-6/8/-6)$ $B(-4/-9/1)$ $C(6/-1/-3)$ $V = 108$ $\varphi = 51,9^\circ$]

2. Die Parabel $y^2 = 4x$ wird von der Geraden $g: x = 8$ geschnitten. Das entstandene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Diesem Paraboloid ist ein Zylinder mit größtem Inhalt einzuschreiben. Weiters erzeugen die beiden Tangenten im Schnittpunkt der Parabel mit der Geraden g ein Dreieck, dessen Spitze auf der x-Achse liegt und das durch die Gerade g begrenzt wird. Durch Rotation dieses Dreiecks entsteht ein Kegel. Berechne das Volumen dieses Kegels und gib das Verhältnis der Rauminhalte von Zylinder, Paraboloid und Kegel an.

[**Lösungen:** $V_{\text{Zylinder}} = 64\pi$ $T_{12} (8 \pm \sqrt{32})$ $V_{\text{Paraboloid}} = 128\pi$ $V_{\text{Kegel}} = \frac{512\pi}{3}$ $V_{\text{Zylinder}} : V_{\text{Paraboloid}} : V_{\text{Kegel}} = 3 : 6 : 8$]

3. Die Funktion $f(x) = (a + bx) \cdot e^x$ hat den Hochpunkt $H(1/e)$. Bestimme a und b, untersuche, ob Nullstellen, Extrema und Wendepunkte vorliegen und zeichne den Graphen. Berechne die Fläche, welche die Kurve mit der x-Achse im ersten Quadranten einschließt.

[**Lösungen:** $f(x) = (2-x) \cdot e^x$ $N(2/0)$ $H(1/e)$ $W(0/2)$ $A = 4,389$]

4. Vor einer Bundespräsidentenwahl, bei der nur die beiden Kandidaten A und B kandidieren, wird unter 3000 repräsentativ ausgewählten Personen eine Meinungsumfrage durchgeführt, bei der sich 1512 Personen für den Kandidaten A entscheiden. Es sei h der Anteil der Personen in der Gesamtbevölkerung, die ihre Stimme Kandidat A geben.

- Berechne den Schätzbereich, in welchem h mit 99%iger Sicherheit liegt.
- Wie groß wäre die befragte Personengruppe zu wählen, damit der Anteil der A-Sympathisanten auf nur 1 Prozent genau geschätzt werden kann?

[**Lösungen:** a) $[0,4804; 0,5276]$ b) 16 640]

1. Gegeben sind die beiden Geraden $g [A(-3/2/-1), B(3/-4/2)]$ und $h: X = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie die

Ebene $\varepsilon: 4x - 4y - 7z = 14$.

- Berechne den Schnittpunkt S der beiden Geraden und seinen Abstand von der Ebene ε .
- Stelle die Gleichung der Ebene ε_1 auf, in der g und h liegen, und berechne die Schnittgerade und den Schnittwinkel der Ebenen ε und ε_1 .
- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks ABC, wobei C der Schnittpunkt von h mit der Ebene ε ist.

[**Lösungen:** $S(1/-2/1)$ $d = 1$ $\varepsilon_1: x+2y+2z = -1$ $s: X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\varphi = 131,81^\circ$ $C(1/1/-2)$ $A = 13,5$]

2. Der Kreis $x^2 + y^2 + 6y - 91 = 0$ und die Kurve $y = ax^2 + b$ schneiden sich in $P(6/y>0)$ rechtwinklig.
- Berechne a und b und fertige eine Zeichnung an.
 - Das kleinere der gemeinsamen Flächenstücke rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.

[**Lösungen:** $p: y = \frac{1}{9}x^2 + 1$ $V = \frac{328\pi}{3}$]

3. Von der Hyperbel $4x^2 - y^2 = 36$ schneidet die Gerade $g: x = 7$ ein Segment ab, dem das flächengrößte Rechteck so einzuschreiben ist, daß zwei Eckpunkte auf der Geraden g und die beiden anderen auf dem Hyperbelbogen liegen. Die Tangenten in diesen Eckpunkten bilden mit der zu g parallelen Rechteckseite ein Dreieck. Zeige, daß der Flächeninhalt des Dreiecks halb so groß ist wie der des Rechtecks.

[**Lösungen:** $A_{\text{Rechteck}} = 15 \cdot \sqrt{5}$]

4. Diskutiere die Funktion $f: x \rightarrow e^x \cdot \sin x$ im Intervall $[0; 2\pi]$ (NST, EW, WP). Zeichne $f(x)$ und $g(x) = \sin x$ im Intervall $[0; \pi]$ und berechne den Flächeninhalt, der von f und g in diesem Intervall eingeschlossen wird.

[**Lösungen:** $N_1 (0/0)$ $N_2 (\pi/0)$ $N_3 (2\pi/0)$ $H(\frac{3\pi}{4}/7,46)$ $T(\frac{7\pi}{4}/-172,46)$ $W_1 (\frac{\pi}{2}/4,81)$ $W_2 (\frac{3\pi}{2}/-111,31)$ $A = 10,07$]

9800 Spittal an der Drau, BRG Zernattostraße 10
Mag. Horst Rittchen

1. Ein viereckiges Grundstück soll im Zuge einer Grenzvereinfachung die Gestalt eines Parallelogramms erhalten. Die Strecke AD und der Winkel α sollen dabei unverändert bleiben.

Wie groß wird die zweite Seite des Parallelogramms, wenn der Flächeninhalt des Grundstückes gleich groß bleiben soll? (Skizze!)

$$AB = a = 56 \text{ m}, AD = d = 97 \text{ m}, DAB = \alpha = 104^\circ, ABC = \beta = 121^\circ, ADC = \delta = 81^\circ$$

[Lösungen: $A = 9\,888,96$ $a_1 = 105,06$]

2. Gegeben sei die Kurvenschar K: $y = -x^2 + c$.

- a) Welche Kurve der Schar K berührt die Parabel mit der Gleichung $y = (x - 2)^2$?
b) Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die von der y-Achse und den beiden bis zum Berührungspunkt reichenden Kurvenbögen umschlossen wird?
c) Wie groß ist das Volumen des Körpers, der bei Rotation dieses Flächenstückes um die y-Achse entsteht?

[Lösungen: a) $y = -x^2 + 2$ b) $A = \frac{2}{3}$ c) $V = \frac{\pi}{3}$]

- 3a) Diskutiere die Funktion $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ und zeichne ihren Graphen.

- 3b) Beweise: zieht man an einer beliebigen Stelle x_0 des Intervalls $[0; x_{\min}]$ ($x_{\min}$ ist die Stelle des relativen Minimums) die Tangente im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ des Graphen, so ist der Flächeninhalt des Trapezes, das von dieser Tangente, den beiden Koordinatenachsen und der Ordinate des Berührungspunktes der Tangente begrenzt wird, konstant.

[Lösungen: a: $x = 0$ $N = W(-1/0)$ $T(0,794/1,89)$ $A = \frac{3}{2}$]

4. Gegeben sind die drei Ebenen $\varepsilon_1: -x + 8y + 4z - 66 = 0$, $\varepsilon_2: 4x - 4y + 7z - 108 = 0$, $\varepsilon_3: -x + 2y + 2z - 13 = 0$ und der Punkt $P_1 (2/6/z_1)$.

Berechne die Gleichung der Kugel, die die Ebenen ε_1 und ε_2 berührt, und zwar die Ebene ε_1 genau im Punkt P_1 (nur die ganzzahlige Lösung ist durchzurechnen). Berechne ferner den Mittelpunkt und den Radius des Schnittkreises dieser Kugel mit der Ebene ε_3 .

[Lösungen: Kugel: $\left[x - \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right]^2 = 81$ Schnittkreis: $M(1/2/5)$ $r = 3 \cdot \sqrt{5}$]

9800 Spittal an der Drau, BRG Zernattostraße 10
Mag. Michael Samitz

1. Von einem Standort P eines unter dem Winkel $\varepsilon = 3,84^\circ$ ansteigenden Tales sieht man den Berggipfel D über dem Berggipfel C um $\delta = 2,15^\circ$ emporragen. Der Höhenwinkel zum Gipfel D wird in diesem Punkt P mit $\alpha = 9,34^\circ$ gemessen. Geht man um 2 500 m näher, so deckt der Gipfel C gerade den Gipfel D. Beide Gipfel sieht man dann unter dem Höhenwinkel $\beta = 15,98^\circ$.

Wie groß ist der Höhenunterschied der beiden Berge?

[Lösungen: 307,306 m]

2. Die Parabel 3. Grades $f: y = x^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch $P(2/3)$ und hat in $T(1/-1)$ einen Tiefpunkt. In ihrem Wendepunkt wird sie von der Parabel 2. Grades $g: y = px^2 + qx + r$ berührt, deren Scheitelpunkt an der Stelle $x = -1$ liegt.

Bestimme beide Kurven sowie den Flächeninhalt des Flächenstückes, das von den beiden Kurven begrenzt wird. Berechne die Extremwerte und zeichne f und g.

[Lösungen: $f: y = x^3 - 3x + 1$ $g: y = -\frac{3}{2}x^2 - 3x + 1$ $A = \frac{27}{64}$]

3. Aus vier gleich langen Stangen der Länge s soll eine Zeltpyramide mit quadratischer Grundfläche und möglichst großem Rauminhalt errichtet werden.

Berechne die Grundkante a und die Höhe h der Pyramide, das Volumen und die Oberfläche dieser Pyramide (mit G) sowie den Neigungswinkel einer Zeltstange mit dem Basisquadrat.

Zeichne die Pyramide für $s = 3 \cdot \sqrt{3}$ cm im Schrägriß (Winkel 45° , Verkürzungsfaktor 0, 5).

[Lösungen: $a = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{3} s$ $h = \frac{\sqrt{3}}{3} s$ $V_{\max} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{27} s^3$ $O = \frac{4 \cdot (1 + \sqrt{2})}{3} s^2$ $\alpha = 35,26^\circ$]

4. Die Ellipse e: $3x^2 + 5y^2 = 120$ und eine Hyperbel haben die Brennpunkte und den Punkt $P(5/y_1 > 0)$ gemeinsam.

Ermittle die Hyperbelgleichung und berechne den Schnittwinkel ϕ zwischen Ellipse und Hyperbel.

Zeichne die beiden Kegelschnitte mit Hilfe der Schmiegekreise und des Punktes P und berechne das Volumen des um die x-Achse rotierenden größeren Flächenstückes, das von Ellipse und Hyperbel begrenzt wird.

[Lösungen: $h: 3x^2 - 5y^2 = 30$ $\alpha = 90^\circ$ $V = 174,702 \pi$]

9800 Spittal an der Drau, BORG Zernattostraße 10
Mag. Hermengild Fischer-Colbrie

1. Gib Definitionsbereich, Asymptoten, Nullstellen, Extrem- und Wendepunkte der Funktion $y = \frac{x^2 - 4x}{x^2 + 4x + 4}$ an, zeichne ihren Graphen und berechne den Inhalt des von der x-Achse und der Kurve eingeschlossenen Flächenstücks.

[**Lösungen:** $a_1: x = -2$ $a_2: y = 1$ $N_1 (0/0)$ $N_2 (4/0)$ $T(1/-\frac{1}{3})$ $W(\frac{5}{2}/-\frac{5}{27})$ $A = 0,789$]

2. An einem unter dem Neigungswinkel $\varepsilon_1 = 51,52^\circ$ ansteigenden Hang eines engen Tales liegt ein Aussichtsplatz in 243 m Höhe über der horizontalen Talebene. Du schaust von diesem Aussichtsplatz durch ein auf der Plattform aufgestelltes Fernrohr, das in 2,5 m Höhe über dem Erdboden befestigt ist. Dabei erblickst du an einer Stelle X des gegenüberliegenden unter $\varepsilon_2 = 32,48^\circ$ ansteigenden Hanges einen bizarr geformten Stein. Der Punkt X liegt 178 m senkrecht über der Ebene des Tales.

Wie lang sind deine Sehstrahlen und unter welchem Tiefenwinkel α verlaufen sie?

[**Lösungen:** $s = 477,6$ m $\alpha = 8,13^\circ$]

3. Eine flache Schale mit parabelförmigem Innenraum ist randvoll mit Wasser gefüllt. Die gesamte Wassermenge soll in ein anderes Gefäß, dessen Innenraum die Gestalt eines halben einschaligen Drehhyperboloids besitzt ($h: 16x^2 - 9y^2 = 144$), umgefüllt werden. Die innere Höhe der Schale beträgt 2 cm, der größere innere Durchmesser $d = 8 \cdot \sqrt{3}$ cm.

- a) Wie hoch steht das Wasser im zweiten Behälter?
b) Wie viele Liter Fassungsvermögen besitzt der zweite Behälter, wenn er 18 cm hoch ist und der Boden 2 cm Stärke hat? (Auf 2 Dezimalen gerundet; Skizze!)

[**Lösungen:** a) $V = 48\pi \text{ cm}^3$ $h = 4$ cm b) $V = 1\,236\pi \text{ cm}^3 = 3,883$ l]

4. Jemand möchte aus Wachs einen Ziergegenstand in der Form einer geraden quadratischen Pyramide gießen. Es stehen $1\,152 \text{ cm}^3$ Wachs zur Verfügung.

- a) Wie müssen Grundkante und Höhe der Gießform gewählt werden, damit der Materialverbrauch bei der Herstellung dieser Form möglichst gering bleibt?
b) Welche Oberfläche und welches Gewicht besitzt der Ziergegenstand, wenn die Dichte von Wachs $\rho = 0,89 \text{ g/cm}^3$ beträgt? (Von der Wandstärke der Gipsform ist abzusehen.)

[**Lösungen:** $a = 12 \cdot \sqrt{2}$ $h = 6 \cdot \sqrt{6}$ $O = 786,8 \text{ cm}^2$ $G = 10,06$ N]

9800 Spittal an der Drau, BORG Zernattostraße 10
Mag. Edith Pichler

1. Ein waagrechtes, ebenes, viereckiges Grundstück wird durch Vorwärtseinschneiden nach zwei Punkten vermessen: $AB = a = 47,8 \text{ m}$, $\angle DAB = \alpha = 97,4^\circ$, $\angle ABC = \beta = 85,3^\circ$, $\angle DAC = \varepsilon = 55,6^\circ$, $\angle ABD = \varphi = 41,2^\circ$. Wie hoch sind die Kosten für die Einzäunung, wenn 1 m Zaun S 1 600,- kostet (gerundet auf S 10 000,-)? Wieviel S kostet das Grundstück, wenn der Preis je m^2 S 950,- beträgt (gerundet auf S 10,-)? Wieviel % der Grundstücksfläche gehen verloren, wenn durch eine Parallele zu AB ein 10 m breiter Streifen abgetrennt wird (Skizze im Maßstab 1 : 1 000)?

[**Lösungen:** Einzäunung: S 300 000,- Grundstück: S 2 018 470,- Verlust: 22,6%]

2. Die Orte A und B sind durch eine 24 km lange geradlinige Straße verbunden. Abseits liegen die Orte C und D: $BC \perp AB$, $BC = 2 \text{ km}$, $BD \perp AB$, $BD = 5 \text{ km}$. Von A aus sollen Leitungen verlegt werden, die ein Stück längs der Straße und anschließend von einem gemeinsamen Verzweigungspunkt aus geradlinig durchs Gelände nach C bzw. D verlaufen. Längs der Straße kostet die Verlegung je km Leitung S 9 000 000, im Gelände aber S 15 000 000.

In welcher Entfernung von B ist der Verzweigungspunkt zu wählen, wenn die Gesamtkosten der Verlegung möglichst gering werden sollen (gerundet auf m)? Wie hoch sind in diesem günstigsten Fall die Kosten (gerundet auf S 100 000)?

[**Lösungen:** $x = 1,836 \text{ km}$ Kosten: S 320 100 000,-]

3. Wie lauten die Lösungen der Gleichung $z^6 + (43-57i)z^3 + (219+876i) = 0$? Zeichnen Sie die Lösungen in der Gaußschen Zahlenebene und ermitteln Sie konstruktiv die Differenz $z_1 - z_4$.

[**Lösungen:** $z_1 = 3,21+2,93i$ $z_2 = -4,15+1,31i$ $z_3 = 0,94-4,25i$ $z_4 = -0,50+2,17i$ $z_5 = -1,63-1,51i$ $z_6 = 2,12-0,65i$]

4. Diskutieren Sie die Funktion $f: y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ und zeichnen Sie den Graphen.

Wie groß ist die von der Funktion, der Asymptote für $x \rightarrow \infty$, $x = -1$ und $x = 1$ eingeschlossene Fläche (exakte Rechnung mit Integration)? Wie lang ist das Kurvenstück zwischen $x = -1$ und $x = 1$ (näherungsweise, $dx = 10^{-2}$)?

[**Lösungen:** $a_{12}: x = \pm 2$ $a_3: y = x$ $N = W(0/0)$ $H(-3,46/-5,20)$ $T(3,46/5,20)$ $A = 1,15$ $b = 2,2$]

9800 Spittal an der Drau, BORG Zernattostraße 10
Mag. Irmgard Winkler

1. Diskutiere die Funktion $f(x) = e^{-0,5x} \cdot \sin x$ im Intervall $[0; \pi]$. Zeichne den Graphen und berechne den Inhalt der Fläche, die von der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird.

[Lösungen: $N_1(0/0)$ $N_2(\pi/0)$ $H(1,1/0,5)$ $W(2,2/0,27)$ $A = 0,966$]

2. Das Dreieck ABC $[A(5/10/6), B(-5/11/7), C]$ ist die Basis einer Pyramide mit der Spitze $S(1/0/11)$.

C ist der Schnittpunkt der Geraden $g: X = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}$ mit der Ebene $\varepsilon: 5x - 2y + 6z = 3$.

Berechne

- a) die Koordinaten von C,
- b) das Volumen der Pyramide,
- c) den Fußpunkt F der Höhe,
- d) den Winkel zwischen AF und AS.

[Lösungen: $C(3/12/2)$ $V = 59$ $F(2/7/14)$ $\alpha = 40,3^\circ$]

3. Das Viereck ABCD mit $a = 5,3$, $b = 3,6$ und $d = 4,6$; $\alpha = 99,5^\circ$, $\beta = 110,2^\circ$ wird vom Punkt A aus durch eine Gerade g in zwei gleich große Teile geteilt.

Berechne den Umfang dieser beiden Flächenstücke.

[Lösungen: $U_1 = 14,16$ $U_2 = 15,97$]

4. In einer Lotterie gibt es insgesamt 20 Warentreffer, 10 Geldtreffer und 50 Nieten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß beim Kauf von 3 Losen

- a) alle 3 Lose gewinnen?
- b) mindestens 2 Warentreffer darunter sind?

Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der Geldtreffer beim Kauf von 3 Losen.

- c) Berechne die Wahrscheinlichkeitsverteilung und stelle sie als Funktion dar.
- d) Wie viele Lose müßte man bei gleichbleibender Wahrscheinlichkeit kaufen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Warentreffer zu erhalten, größer als 80% wird?

[Lösungen: a) 0,050 b) 0,153 c) [0,6663 0,2939 0,0383 0,0015] d) 6]