Mag. Gerhard Hainscho (Hrsg.)

Skripten zur Lehrer/innen-Fortbildung

Matura 2008

Aufgaben zur schriftlichen Reifeprüfung aus Mathematik im Haupttermin 2007/08

Klagenfurt, Jänner 2009

Inhalt

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

Sie arbeiten als Industriespion der Firma AQUA-T-RACER. Die Konkurrenzfirma FERSHING testet ein sensationelles neues Atomboot. Dieses Boot ist für ihre Firma ein Objekt von größtem Interesse.

1. Ihr Team beobachtet das Testschiff von Fershing bei einem Marschfahrttest auf gerader Strecke. Um 14:00 wird das Schiff vom Leuchtturm A unter dem Winkel 270° rw und vom 10 Seemeilen entfernten, genau nördlich von A liegendem Leuchtturm B unter dem Winkel 210° rw angepeilt. Um 14:05 ergeben die Peilungen von A und B aus 300° rw bzw. 230° rw.

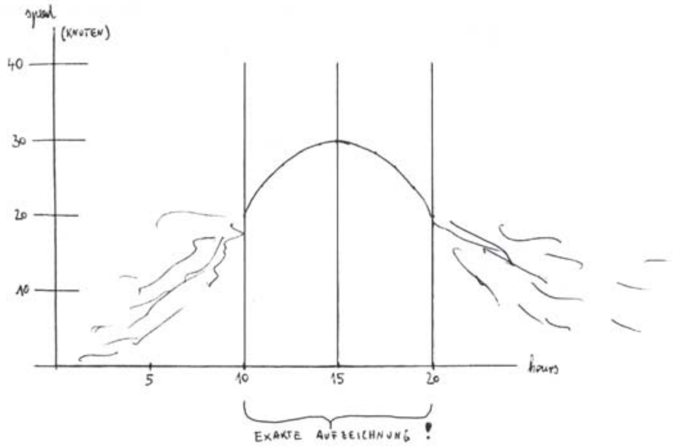
   a) Ermitteln Sie die Marschfahrtgeschwindigkeit des Testbootes in Knoten. 3 •

   b) Geben Sie einen zweiten Lösungsweg an und erklären Sie, warum Sie sich für den 1. Lösungsweg entschieden haben. 1 •

   [**Lösungen:** a) XY = 4,274 sm v ≈ 51 Knoten]

2. Der Marketingmanager der Firma Fershing behauptet: „Bei einer Testreihe mit minimaler Motorleistung (1 Motor - 50% Teillast) hat unser Boot innerhalb der besten 10 Stunden eine Distanz von 285 Seemeilen zurückgelegt und damit die Rekorde der Firma Aqua-T-Racer um mehr als 30 Seemeilen gebrochen."

   Durch viel Glück kommen Sie in den Besitz eines beschädigten GPS-Auswertungsschreibers dieser Testfahrt. Im entscheidenden Bereich von 10 bis 20 Stunden Fahrzeit ist die Geschwindigkeit des Bootes exakt zu erkennen. Eine erste Computeranalyse ergibt: dieser Teil der Geschwindigkeitsfunktion kann durch eine Polynomfunktion 2. Grades angenähert werden … danach fällt der Computer aus. Da Sie in Zeitnot sind, müssen Sie mit ihren eigenen mathematischen Fähigkeiten den zurückgelegten Weg des Bootes im Zeitraum von 10 bis 20 Stunden berechnen.



   a) Hat der Marketingmanager Recht? Um wie viele Seemeilen hat er übertrieben? 3 •

   b) Wie könnten Sie die Aufgabenstellung ohne die Computerinformation (Polynomfunktion 2. Grades) zumindest hinreichend genau lösen? 1 •

   [**Lösungen:** a) 266,67 sm]

3. Um Fotos aus nächster Nähe zu bekommen (Maximaldistanz für brauchbare Teleaufnahmen = 1,5 Seemeilen) startet ihr Spionageboot am nächsten Tag um 8:00 mit v = 15 Knoten genau Richtung N (0° rw) vom Ausgangshafen C. Um 10:00 verlässt das Testboot der Firma Fershing den Hafen D (60 sm nördlich und 50 sm östlich von C gelegen) mit v = 24 Knoten und fährt exakt Richtung W (270° rw). Keines der beiden Boote macht eine Kurskorrektur.

   Berechnen Sie die geringste Entfernung! 4 ●
   Um wie viel Uhr sollten die meisten Bilder gemacht werden?

   [**Lösungen:** d_{min} = 1,06 sm 12:03:35,7]

4. Ihr Auftraggeber kauft einen weiteren Prototyp des Testbootes. Die Zeit drängt und die Ingenieure möchten den Motor zerlegen und analysieren. Es kommt zu einer Panne und einem schweren radioaktiven Zwischenfall am Tag x. Fünf Tage nach dem Tag x wird eine Strahlungsintensität von 540 Einheiten, 15 Tage nach x eine Intensität von 100 Einheiten gemessen. Die Untersuchungen können erst fortgesetzt werden, wenn die Strahlung unter 10 Einheiten abgefallen ist.

   Wie viele Tage nach x wird das sein? 4 ●

   [**Lösungen:** 28,65 ≈ 29]

5. Jeder Spion bekommt auch eine Bezahlung. Ausgemacht war eine sofort zu bezahlende Summe von 300000 €, die alternativ in gleichwertigen Raten bezahlt werden darf. Die Firma Aqua-T-Racer bietet Ihnen 5 Jahre lang eine jährliche vorschüssige Zahlung von 61000 € an. Für die weiteren Überlegungen wird ein effektiver Zinssatz von 3% angenommen.

   a) Höflich lächelnd nehmen Sie das Angebot an, verlangen aber durch ihren Anwalt - welcher die Gleichwertigkeit der Bezahlung in Erinnerung ruft - am Ende des letzten (5.) Jahres eine Einmalzahlung von … ja, von wie viel €? 2 ●

   b) Als Alternative schlagen Sie eine äquivalente jährliche nachschüssige Zahlung über 10 Jahre vor und verlangen eine Rate von … wie viel €? 2 ●

   [**Lösungen:** a) 14209,17 € b) 35169,15 €]

6. Nach so vielen Aufregungen haben Sie vom reellen Leben einmal genug und Sie beschließen sich den komplexen Inhalten der Mathematik hinzugeben.

   a) Bestimmen Sie die Lösungen z_1, z_2 der Gleichung $z^2 - 9z - 5iz + 14 + 22i = 0$ 2 ●

   b) Zeichnen Sie unter Verwendung von 6a) 2 ●
   $\{z \in \mathbb{C} \mid (|z - z_1| \le 5) \wedge (|z - z_2| > 2) \wedge (|z_1| > |z_2|)\}$

   [**Lösungen:** a) $z_1 = 5 + 3i$ $z_2 = 4 + 2i$]

24 - 20 ●	19 - 17 ●	16 - 14 ●	13 - 10 ●	9 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

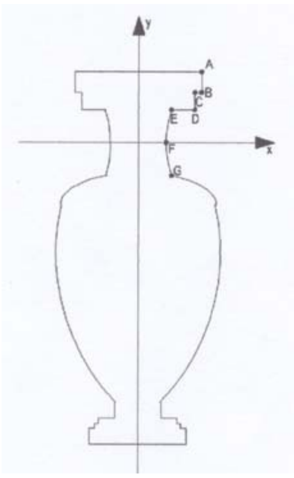
Hilfsmittel: Formelsammlung, Grafikrechner

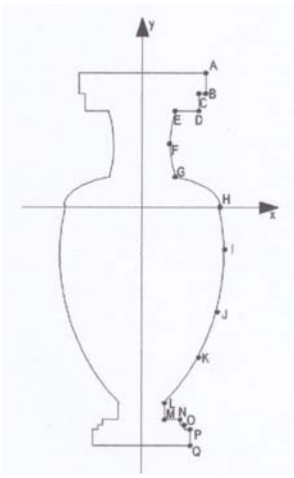
1. 

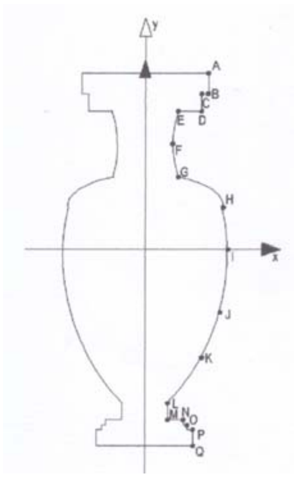
Für die Fußballeuropameisterschaft 2008 wurde ein neuer Henri-Delaunay-Pokal entworfen. Die folgenden Skizzen zeigen die Hüllkurven der Innenhöhlung. Die Angaben der dazugehörenden Punkte sind bereits an das jeweilige Koordinatensystem angepasst.

Wie viele Liter Sekt oder Champagner wird der Sieger der EM einfüllen können, wenn der Pokal maximal bis zum Punkt E gefüllt wird und der Hohlraum bei Punkt L beginnt?

Die Parameter der benötigten Funktionsterme sind auf eine Dezimalstelle zu runden. 8 ●







Hyperbel		
Punkt	x	y
E	6,9	7
F	5,7	0
G	6,9	-7

Ellipse		
Punkt	x	y
G	6,9	6,4
H	16,3	0

f(x) laut Angabe		
Punkt	x	y
H	16,3	8,7
I	17,3	0
J	15,7	-13,4
K	11,9	-22,7
L	4,8	-32,3

$$f(x) = \begin{cases} 9{,}8 \cdot \sqrt{17{,}3 - x} \\ -9{,}8 \cdot \sqrt{17{,}3 - x} \end{cases}$$

[**Lösungen:** $V = 2485{,}6 + 3895{,}2 + 36309{,}8 = 42690{,}65 \text{ cm}^3 \approx 42{,}7 \text{ l}$]

2.

Bei der Fußballeuropameisterschaft 2008 wird es in Klagenfurt zu einem Match Polen (A) gegen Kroatien (B) kommen.

Alle Wahrscheinlichkelten (WS) in den folgenden Angaben sind frei erfunden und wurden mittels Münzwurf den genannten Mannschaften zugeordnet.

2.1 Der Trainer von Polen stellt seine Mannschaft zusammen. Hierfür werden vier der sieben verfügbaren Abwehrspieler, vier der fünf Mittelfeldspieler, zwei der sechs Angriffsspieler und einer der drei Torhüter ausgewählt.

a) Wie viele Möglichkeiten hat der Trainer seine Mannschaft zusammenzustellen? 0,5 •

b) Vor dem Spiel stellen sich die ausgewählten Spieler für ein Gruppenfoto so auf, dass die Abwehr-, die Mittelfeld- und die Angriffsspieler jeweils nebeneinander stehen und der Torwart am Rand steht. Wie viele Möglichkeiten gibt es hierfür? 0,5 •

2.2 Für den Torwart beträgt die Wahrscheinlichkeit während des Spiels verletzt zu werden 2%, für jeden der 10 Feldspieler liegt der entsprechende Wert bei 5%. Mit welcher WS wird im Laufe des Spiels keiner der 11 Akteure einer Mannschaft wegen Verletzung ausgewechselt? 1 •

2.3 Bei Unentschieden nach 90 Spielminuten wird das Spiel durch Elfmeterschießen entschieden. Wir gehen davon aus, dass jeder Spieler von Polen mit einer WS von 80% einen Elfmeter verwandelt, während jeder Spieler von Kroatien eine Trefferquote von 75% hat.

a) Wie viele Elfmeter müssen die Kroaten mindestens schießen, damit sie mit einer WS von 99,9% mindestens einen Treffer erzielen? 1 •

Die UEFA diskutiert, ob sie anstelle des üblichen Elfmeterschießens folgende Alternativen für die EM 2008 einführen soll:

b) Beide Mannschaften schießen je dreimal. Wie groß ist die WS, dass dieses Elfmeterschießen im Falle unseres Spiels unentschieden endet? 1 •

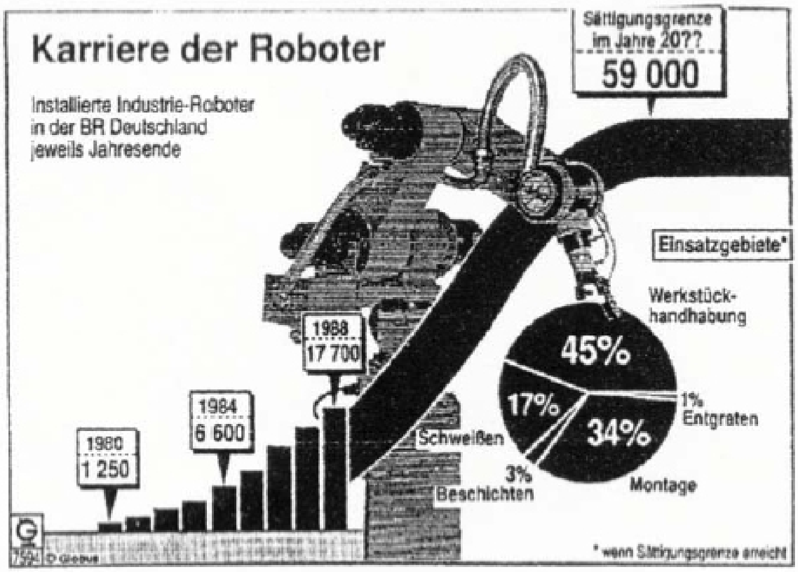
c) Die Schützen der beiden Mannschaften treten paarweise gegeneinander an; liegt danach eine Mannschaft in Führung, endet das Spiel sofort, andernfalls wird ein neues Paar bestimmt und der Vorgang wiederholt. Mit welcher WS würde bei diesem Verfahren nach drei angetretenen Paaren noch immer kein Sieger feststehen? 1 •

2.4 Unter den Zuschauern werden bei diesem Match in Klagenfurt 35% Polen und 40% Kroaten erwartet. Die Polizei geht von 3% gewaltbereiten Polen und von 2% gewaltbereiten Kroaten aus. Den restlichen Zuschauern wird keine Gewaltbereitschaft zugeordnet. Wie groß ist die WS, dass ein von der Polizei wegen Gewalttätigkeit aufgegriffener Zuschauer ein Pole ist? 1 •

2.5 Der Torhüter von Kroatien behauptet, dass er einen Elfmeter mit einer WS von 80% verwandelt. Die Hypothese, dass seine Trefferquote mindestens 80% beträgt, soll bei einem Stichprobenumfang von 30 Elfmetern auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet werden. Geben sie den Ablehnungsbereich für diesen Test an. 2 •

[**Lösungen:** 2.1a) 7875 2.1b) 13824 2.2) 0,587 2.3a) 5 2.3b) 0,358 2.3c) 0,275 2.4) 0,567 2.5) {28, 29, 30}]

3. 



Daten aus der Grafik :

Jahr	Anzahl
1980	1250
1984	6600
1988	17700

angenommene Sättigungsgrenze : 59000

Die Grafik zeigt die Anzahl der in Deutschland ab 1980 installierten Industrieroboter.

a) Wählen Sie ein geeignetes Wachstumsmodell und begründen Sie dies kurz. 0,5 ●

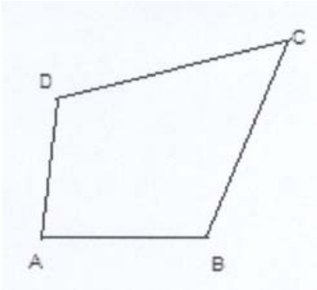
b) Bestimmen Sie danach eine Funktion, deren Graph den Verlauf der Grafik möglichst gut annähert, durch Interpolation. 2 ●

c) Finden Sie nun eine Funktion, deren Graph die Werte aus der Tabelle möglichst gut trifft, mittels Regression, wobei Sie logistisches Wachstum annehmen. Betrachten Sie beide Funktionsgraphen und beschreiben Sie die wesentlichen Unterschiede. Bestimmen Sie die Anzahl der Industrieroboter im Jahr 2008 in beiden Modellen. (Protokollieren Sie Ihre Eingaben!) 1,5 ●

d) Welche Wachstumsmodelle kennen Sie? Beschreiben Sie diese durch Differentialgleichungen und leiten Sie die Funktionsgleichung für das logistische Wachstum her. 4 ●

[**Lösungen:** b) $f(x) = \dfrac{59000}{1 + 46{,}2 \cdot e^{-0{,}3732 \cdot x}}$ c) $f(x) = \dfrac{24885{,}09447}{1 + 18{,}9081 \cdot e^{-0{,}4801 \cdot x}}$]

4.



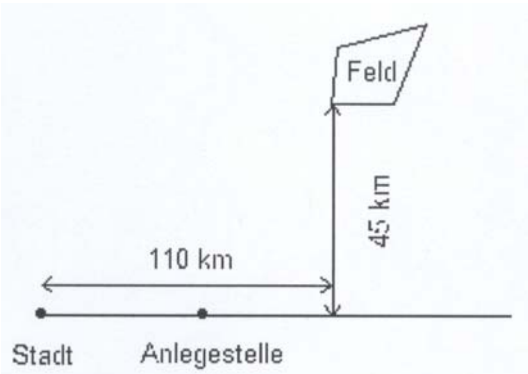
Ein Feld wird verkauft und neu daher vermessen. Von einer 250 m langen Standlinie AB werden folgende Horizontalwinkel gemessen:

$\alpha_1 = \angle BAD = 87{,}2°$ $\alpha_2 = \angle BAC = 63{,}4°$

$\beta_1 = \angle ABD = 52{,}1°$ $\beta_2 = \angle ABC = 79{,}9°$

a) Berechnen Sie den Umfang des Feldes. 4 ●

b) Das Grundstück liegt 45 km von einem Fluss entfernt, der bei einer Stadt vorbeifließt. 4 ●
Dieser Fluss soll als Transportweg in die Stadt genutzt werden. Als Agrarförderung wird eine Straße zum Fluss gebaut.



In welcher Entfernung von der Stadt soll die Anlegestelle für den Warentransport errichtet werden, wenn die Transportkosten möglichst gering sein sollen? Wie hoch sind die Kosten?

Kosten je t pro km mit LKW : 26 €

Kosten je t pro km mit Schiff : 16 €

Maße laut Skizze.

[**Lösungen:** a) BC = 374,05 AD = 203,73 CD = 239,94 b) ≈ 75 km K_{min} = 2 682,23 €]

32 - 29 ●	28 - 25 ●	24 - 20 ●	19 - 16 ●	15 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Mutter und Tochter tragen eine Serie von Tennisspielen aus. Die Tochter gewinnt üblicherweise 40% der Spiele. 4 ●
   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt sie nur eines von 7 Spielen?
   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt sie die Mehrzahl von 7 Partien?
   c) Wie oft müssen sie gegeneinander spielen, damit mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit die Tochter mindestens ein Spiel gewinnt? Interpretiere das Rechenergebnis!
   d) Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen wird durch die Formel $E(X) = n \cdot p$ angegeben. Beweise die Formel für $n = 2$.

   [**Lösungen:** a) 0,13 b) 0,29 c) 10]

2. Gegeben ist das Dreieck ABC mit den Eckpunkten A(-6/1), B(4/3), C(4/-9). 4 ●
   a) Bestimme eine Gleichung des Kreises k_f durch die Seitenmittelpunkte M_a, M_b, M_c.
   b) Bestimme die Höhenfußpunkte F_a, F_b, F_c und verifiziere, dass sie auf k_f liegen.
   c) Bestimme den Höhenschnittpunkt des Dreieckes ABC und die Mittelpunkte P_a, P_b, P_c der Strecken Eckpunkt - Höhenschnittpunkt. Zeige, dass auch P_a, P_b und P_c auf k_f liegen! Bemerkung: Der Kreis k_f heißt Neunpunktekreis oder Feuerbachkreis.

   [**Lösungen:** a) k_f: $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 13$ b) $F_a(4/1)$ $F_b(-2/-3)$ $F_c(\frac{22}{13} / \frac{33}{13})$ c) H(2/1) $P_a(-2/1)$ $P_b(3/2)$ $P_c(3/-4)$]

3. Der Graph der Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat im Punkt P(2/3) die Steigung k = 9 und mit W(0/1) einen Wendepunkt. 4 ●
   a) Bestimme f(x) sowie deren Extrempunkte und die Gleichung der Wendetangente.
   [Lösung: $f(x) = x^3 - 3x + 1$]
   b) Stelle den Graphen der Funktion samt Wendetangente im Intervall [-2;2] dar.
   c) Lege im Hochpunkt die Tangente an den Graphen und berechne den Flächeninhalt jener Fläche, die vom Graphen und dieser Tangente eingeschlossen wird.

   [**Lösungen:** a) H(-1/3) T(1/-1) t_W: y = -3x + 1 c) A = 6,75]

4. a) Begründe die Darstellung der physikalischen Arbeit durch das Integral $W = \int_a^b F(x)\, dx$. 4 ●
   b) Berechne die Dehnungsarbeit beim Dehnen einer Feder aus der Ruhelage auf die Länge l.
   c) Berechne die Arbeit, die notwendig ist, um einen Körper der Masse m im Gravitationsfeld einer kugelförmigen Masse M aus der Entfernung r_1 in die Entfernung r_2 zu bringen.
   d) Welche Arbeit ist erforderlich, um ein Raumschiff der Masse 2500 kg aus dem Gravitationsfeld des Mondes zu entfernen?
   Mondmasse = $7{,}3 \cdot 10^{22}$ kg; Mondradius = 1738 km; G = $6{,}673 \cdot 10^{-11}\ m^3kg^{-1}s^{-2}$.

   [**Lösungen:** b) $\frac{kl^2}{2}$ c) $G \cdot M \cdot m \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$ d) $\approx 7 \cdot 10^9$ J]

16 - 14,5 ●	14 - 13 ●	12,5 - 10 ●	9,5 - 8 ●	7,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201026 **BG/BRG Klagenfurt Mössingerstraße** **9020 Mössingerstraße 25**
8B^G Mag. Walter Scherjau

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

---

1. Zwei Radfahrer A und B sind vom Schnittpunkt zweier unter einem spitzen Winkel zusammenlaufenden Straßen 8 km bzw. 5 km entfernt. Die Entfernung der beiden Radfahrer voneinander beträgt 7 km. A fährt mit 24 km/h auf einer Straße, B mit 18 km/h auf der anderen Straße in Richtung Kreuzung.

   a) Fertige einen Plan im Maßstab 1 : 100000 an. 2 ●

   b) Berechne den Winkel, den die Straßen miteinander einschließen. 4 ●
   Wann und wo ist die Entfernung der beiden nur mehr halb so groß (2 Lösungen)?

   c) Wann und wo ist die Entfernung voneinander am kleinsten? Gib die Entfernung an! 4 ●

   [**Lösungen:** b) 60° $t_1 = 0{,}476$ h AS = 11 km BS = 2,96 km $t_2 = 0{,}165$ h AS = 4,04 km BS = 2,03 km c) 0,3205 h]

2. Ein paraboloidschichtförmiges Fass (p: $y = ax^2 + c$) hat folgende Maße: Höhe 80 cm; Durchmesser: 60 cm max. / 40 cm min.

   a) Fertige eine Skizze an und stelle die Parabelgleichung auf. 2 ●

   b) Berechne das Gesamtfassungsvermögen des Fasses in Litern. 4 ●

   c) Wenn dieses Fass auf dem Boden steht, reicht der Inhalt bis zu einer Höhe von 60 cm. 4 ●
   Berechne, zu wie viel Prozent das Fass dann gefüllt ist.

   [**Lösungen:** a) p: $y = -\frac{1}{160}x^2 + 30$ b) $V_1 = 57600\pi = 180{,}95$ l c) $V_2 = 45825\pi \approx 80\%$ von V_1]

3. Man hat festgestellt, dass medizinisch wertlose Tabletten, so genannte Placebos, bei vielen Patienten die gleiche Wirkung erzielen wie gleich aussehende echte Tabletten.

   a) In einer Klinik bekommt ein Patient zur Beruhigung zwei Tabletten. 3 ●
   Die Krankenschwester nimmt diese beiden Tabletten nacheinander zufällig aus einer Schachtel, in der fünf Beruhigungstabletten und ein Placebo sind. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

   a1) beide Tabletten echt sind.

   a2) nur die erste Tablette echt ist.

   a3) eine der beiden Tabletten das Placebo ist.

   b) In dieser Klinik weiß man, dass 60% der Patienten auf Placebos ansprechen. 3 ●
   Die Zufallsvariable „Anzahl der Patienten, die auf Placebos ansprechen“ ist binomialverteilt. Es werden zehn Patienten der Klinik zufällig ausgewählt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

   b1) höchstens drei Patienten auf Placebos ansprechen?

   b2) genau sechs Patienten auf Placebos ansprechen?

   b3) mindestens 8 Patienten auf Placebos ansprechen?

   c) Wie viele Patienten, die Beruhigungsmittel nehmen, müsste man untersuchen, 2 ●
   um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens einen unter ihnen zu finden, der auf Placebos anspricht?

   [**Lösungen:** a1) $\frac{2}{3}$ a2) $\frac{1}{6}$ a3) $\frac{1}{3}$ b1) 0,055 b2) 0,251 b3) 0,167 c) 6]

4. Eine Maschine stellt Nägel her. Die Länge der Nägel sei normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 8 cm und der Standardabweichung σ = 0,15 cm. Berechne

   a) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Länge eines Nagels die Abweichung vom Erwartungswert von 0,2 cm nicht übersteigt. Skizziere den Sachverhalt mit Hilfe einer Glockenkurve. 4 ●

   b) die Toleranzgrenzen so, dass 95% der erzeugten Nägel zum Verkauf freigegeben werden können. Skizziere den Sachverhalt mit Hilfe einer Glockenkurve. 4 ●

   [**Lösungen:** a) 0,816 b) 8 ± 0,294 cm]

5. Auf einem Durchmesser der Kugel mit dem Radius R = 20 cm liegen die Mittelpunkte von drei anderen Kugeln. Die beiden äußeren Kugeln berühren die gegebene Kugel von innen und die zwischen ihnen liegende Kugel diese beiden von außen. Die Radien der beiden äußeren Kugeln verhalten sich wie 2:3. Fertige eine Skizze an! Bei welchen Radien wird die Summe der Volumina aller eingeschriebenen Kugeln ein Minimum? 8 ●

   [**Lösungen:** $r_1 = 5{,}231$ $r_2 = 6{,}921$ $r_3 = 7{,}847$]

6. Von 1 g Polonium (radioaktiv) sind nach 65 Tagen 0,718 g noch nicht zerfallen. Nimm eine stetige Mengenabnahme an.

   a) Zeige: Das Zerfallsgesetz lautet $N(t) = N(0) \cdot e^{-0{,}0050967 \cdot t}$ 2 ●

   b) Auf wie viel % des Anfangswertes ist die Stoffmenge nach 316 Tagen abgesunken? 2 ●

   c) Nach welcher Zeit ist die Hälfte der ursprünglichen Stoffmenge zerfallen? 2 ●

   d) Nach welcher Zeit beträgt die noch vorhandene Stoffmenge 0,35 g? 2 ●

   [**Lösungen:** b) ≈ 20% c) ≈ 136 Tage d) ≈ 206 Tage]

52 - 47 ●	46 - 40 ●	39 - 33 ●	32 - 27 ●	26 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-x}\cdot(2 - e^{-x})$. 8 ●
   a) Untersuche sie auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte. Untersuche auch das Verhalten von f für $x \to \infty$ und zeichne den Graphen von f.
   b) Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die von f, der x-Achse und der Geraden $x = u$ ($u > 0$) begrenzt wird. Welchem Grenzwert strebt dieser Flächeninhalt für $u \to \infty$ zu?

   [**Lösungen:** a) N(-0,69/0) H(0/1) W(0,69/0,75) a: y = 0 b) $A = 2 + \frac{1}{2e^{2u}} - \frac{2}{u} \to 2$]

2. Eine Ellipse in erster Hauptlage hat die Brennweite $3\cdot\sqrt{7}$ und schneidet eine Parabel $y = c\cdot x^2$ im Punkt P(3/4). 8 ●
   a) Ermittle die Gleichungen der beiden Kegelschnitte.
   b) Das von der Parabel, der Parabeltangente in P und der x-Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers.

   [**Lösungen:** a) ell: $2x^2 + 9y^2 = 162$ par: $y = \frac{4}{9}x^2$ b) t_{par}: $y = \frac{8}{3}x - 4$ $V = 3\pi$]

3. Bei der Abfüllung von Waschmittelpaketen sei die Füllmenge normalverteilt. 8 ●
   Die eingestellte Sollmenge beträgt 1020 g, die von der Füllanlage abhängige Standardabweichung σ beträgt 15 g.
   a) Welcher Prozentsatz ist untergewichtig, wenn auf dem Paket 1000 g angegeben sind? Wie viel Prozent sind schwerer als 1050 g?
   b) Bei einer Kontrolle wurde festgestellt, dass 95% der Pakete in einem bestimmten Bereich um den eingestellten Wert (1020 g) lagen. Welches um $\mu = 1020$ g symmetrische Toleranzintervall wurde dabei verwendet?
   c) Eine neue Abfüllanlage mit $\sigma = 10$ g wird angeschafft. Auf welchen Mittelwert μ muss die Maschine eingestellt werden, wenn höchstens 5% aller Pakete weniger als 995 g enthalten sollen?
   d) Welche Standardabweichung dürfte die neue Maschine höchstens haben, wenn maximal 3% aller Pakete um mehr als 10 g von der eingestellten Sollmasse (1000 g) abweichen sollen?

   [**Lösungen:** a) 0,0918 b) [990,6;1049,4] c) 1011,5 g d) 4,61 g]

4. Zwei in derselben Horizontalebene liegenden Orte O_1 und O_2 sollen durch eine geradlinige Strasse miteinander verbunden werden. Zwischen O_1 und O_2 befindet sich ein Berg, sodass die Gerade O_1O_2 nicht direkt abgesteckt werden kann. Es wird daher ein Hilfspunkt P gewählt. Die Strecke $O_1P = a = 2140$ m und $O_2P = b = 3165$ m sowie der Winkel $\angle O_1PO_2 = 94{,}6°$ werden gemessen. Von P aus können Anfangspunkt A und Endpunkt E des Tunnels durch den Berg anvisiert werden. Man misst die Winkel $\angle O_1PA = 23{,}7°$ und $\angle EPO_2 = 19{,}3°$. Berechne die Länge des Tunnels (Angabe in m) auf 1 Dez. genau. 8 ●

   [**Lösungen:** 1746,3 m]

32 - 29 ●	28 - 25 ●	24 - 21 ●	20 - 17 ●	16 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Ein aufrecht stehendes Weinfass hat die Form eines auf beiden Seiten abgeschnittenen Rotationsellipsoids. Der Fassboden hat den Durchmesser 4,8 dm, der größte Durchmesser des Fasses beträgt 8 dm. Das Fass hat eine Höhe von 12,8 dm. 6 •

   a) Wähle ein günstiges Koordinatensystem und stelle die Gleichung jener Ellipse auf, die bei Rotation um die y-Achse das gegebene Fass erzeugt!

   b) Weise nach, dass das volle Fass 5,06 hl Wein enthält!

   Aus diesem Wein wird Sekt gemacht. Ein Sektglas wird innen von der Parabel $x^2 = 2py$ begrenzt. Die innere Höhe beträgt 10 cm, der innere obere Durchmesser 6 cm. Die Füllmenge liegt 1 cm vom oberen Rand entfernt. 6 •

   c) Wie viel Sekt (in Litern) wird in ein Glas gefüllt?

   d) Eine Flasche Sekt enthält 0,7 Liter. Ein Kellner bleibt beim Einschenken immer 2 mm unter der Füllmarke. Bei wie vielen Gläsern hat er eine Flasche eingespart?

   [**Lösungen:** a) $4x^2 + y^2 = 64$ c) 0,1145 l d) 140]

2. Ein ebenes viereckiges Grundstück ABCD mit den Seiten AB = a = 63,4 m, BC = b = 62,0 m, DA = d = 15,3 m und den Winkeln $\angle DAB = \alpha$ 87,3° und $\angle ABC = \beta = 115{,}6°$ soll durch eine durch den Eckpunkt A gehende „Teilungslinie“ in zwei flächengleiche Teile geteilt werden.

   a) Berechne zunächst die Fläche des gesamten Grundstücks sowie seinen Umfang. 4 •

   b) Die eine Hälfte des Grundstückes wird zum Verkauf angeboten. 2 •
   Wie groß ist diese Fläche? Berechne, wie weit der auf der Seite BC liegende zweite Eckpunkt der „Teilungslinie“ vom Eckpunkt C entfernt ist.

   c) Erläutere, bei welcher Art von Aufgabenstellung der Kosinussatz angewandt wird und begründe, was man dabei beachten muss. 2 •

   d) Für das zum Verkauf angebotene Grundstück interessieren sich zwei Käufer A und B. 4 •
   - Interessent A bietet 23000 € sofort und jährlich vorschüssig durch 5 Jahre 6000 €.
   - Interessent B bietet 20 000 € sofort und jährlich 5 000 € nachschüssig 6 Jahre lang und außerdem nach 10 Jahren einmalig 5 000 €.

   Argumentiere durch Berechnung der Barwerte, welches Kaufangebot höher ist! Rechne mit einem Zinssatz von p = 3% p.a.

   [**Lösungen:** a) A = 2441,50 m^2 U = 238,96 m b) A/2 19,30 m d) B_A = 51302,60 € B_B = 50806,43 €]

3. Das Quadrat ABCD [A(-5/4/-3), B(3/4/3), D(-5/-6/z_4)] ist die Basis einer Pyramide, deren Spitze S_1 der Schnittpunkt der drei Ebenen ε_1: x - y + 2z = 9, ε_2: 5x + y + z = 6, ε_3: 2x + y - z = -3 ist.

   a) Berechne die Koordinaten von S_1 und das Volumen dieser Pyramide. 6 •

   b) Die Dreiecksfläche BCS_1 ist die Basis eines Tetraeders; dessen Körperhöhe FS_2 = 6 E beträgt. Dabei ist F der Schwerpunkt des Dreiecks BCS_1. Berechne die Koordinaten der Spitze S_2 (2 Lösungen) und das Volumen dieses Tetraeders. 6 •

   [**Lösungen:** a) S_1(1/-2/3) V = 40 b) F($\frac{7}{3}$/-$\frac{4}{3}$/3) S_2($\frac{7}{3}$/-$\frac{4}{3}$/-3) S_2'($\frac{7}{3}$/-$\frac{4}{3}$/9) V = 20]

4. a) Die Blumenhandlung „Blumenparadies“ weiß aus Erfahrung, dass beim Transport ungefähr 10% der transportierten Frühlingsblumen beschädigt werden. Die Kundin Frau Flora kauft 30 Narzissen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass davon keine / genau 2 / mindestens 2 beschädigt sind. 4 •

b) Frau Flora ist neugierig: Sie überlegt, wie viele Frühlingsblumen sie kaufen müsste, um mit mindestens 80%-iger Sicherheit eine beschädigte Blume zu erhalten. Berechne diese Anzahl von Blumen! 3 •

c) Diese Blumenhandlung erhält eine Lieferung von 3000 Tulpen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 3000 Tulpen

- zwischen 285 und 310 Tulpen beschädigt sind?
- höchstens 270 Tulpen beschädigt sind?

In welchem symmetrischen Bereich um den Erwartungswert liegt die Anzahl der beschädigten Blumen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 80%?

Veranschauliche die Aufgabe mit Hilfe der GAUSS’schen Glockenkurve und löse sie tabellarisch.

[**Lösungen:** a) 0,042 / 0,228 / 0,816 b) 16 c) 0,5477 / 0,0336 / [278,8 ; 321,2]]

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Von einem viereckigen Grundstück ABCD sind folgende Bestimmungsstücke gegeben: 12 •
$AB = a = 37$ m, $AD = d = 41$ m, $\angle DAB = \alpha = 108°$, $\angle ABC = \beta = 104°$, $\angle ADC = \delta = 66°$.
   a) Zeichne das Grundstück in einem günstigen Maßstab.
   b) Berechne den Flächeninhalt des Grundstücks auf m^2 genau.
   c) Der verkaufswillige Besitzer des Grundstücks bekam folgendes Angebot: Anzahlung sofort 65000,- €, den Rest in 10 nachschüssigen Jahresraten in der Höhe von jeweils 13000,- €. Begründe in ganzen Sätzen, warum der Besitzer dieses Angebot nicht annehmen soll, wenn der ortsübliche Quadratmeterpreis derzeit 100,- € beträgt und mit einem Zinssatz von 4,5% p.a. kalkuliert wird.

   [**Lösungen:** b) $A \approx 1699$ m^2 c) $E_A = 260689{,}73$ € $E = 263849{,}50$ €]

2. Eine Werbefirma erwägt als neues Firmenlogo einen Linienzug, der an die Initialen A und V erinnern soll. Der Linienzug besteht aus dem Graphen einer Polynomfunktion fünften Grades im Bereich ihrer Nullstellen. Die Polynomfunktion hat im Ursprung einen Sattelpunkt, den Extremwert in E(3/-5,4) und an der Stelle x = 1 die Steigung -4/3. 12 •
   a) Zeige, dass die Funktionsgleichung $f(x) = \frac{x^5}{30} - \frac{x^3}{2}$ lautet.
   b) Berechne Nullstellen, Extrema und Wendepunkte und fertige eine Zeichnung an, die alle Nullstellen zeigt.
   c) Für den Werbepsychologen ist es wichtig, die Auffälligkeit des Logos zu beurteilen. Berechne dazu den Flächeninhalt der Flächenstücke, welche die Funktion mit der x-Achse einschließt.

   [**Lösungen:** b) $N_1 = W_1(0/0)$ $N_{23}(\pm\sqrt{15}/0)$ H(-3/5,4) T(3/-5,4) $W_1(-2{,}12/3{,}34)$ $W_2(2{,}12/-3{,}34)$ c) $A_1 = A_2 = 9{,}375$]

3. In einer Schule mit 400 Schülern wird ein Jahresbericht herausgegeben, der durchschnittlich von 80% der Schüler gekauft wird. 12 •
   a) In der Redaktion arbeiten 10 Mitarbeiter, von denen jeder mit Wahrscheinlichkeit 0,1 bei jeder Sitzung fehlt. Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten:
      a_1) Alle Redaktionsmitglieder sind anwesend.
      a_2) Es fehlen weniger als ein Drittel der Redakteure.
   b) Von den Käufern waren 75% Mädchen, von den Nichtkäufern nur 30%. Wie viele Mädchen müssten nach diesen Angaben an dieser Schule sein?
   c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 315 und höchstens 335 Exemplare verkauft werden.
   d) Es stehen 340 Exemplare zur Verfügung. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden alle verkauft?

   [**Lösungen:** a_1) 0,3487 a_2) 0,9872 b) 264 c) 0,7037 d) 0,0062]

4. Eine Parabel in 1. Hauptlage und eine zu ihr konfokale Ellipse gehen durch den Punkt $P(3/2\cdot\sqrt{6})$. 12 ●

a) Zeige, dass die Gleichungen der Kegelschnitte folgende Form haben: par: $y^2 = 8x$, ell: $8x^2 + 9y^2 = 288$.

b) Berechne den Schnittwinkel der beiden Kurven.

c) Das kleinere von den Kurven eingeschlossene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Wie groß ist das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers?

[**Lösungen:** b) 67,79° c) $V_{par} + V_{ell} = 36\pi + 40\pi = 76\pi$]

48 - 45 ●	44 - 38 ●	37 - 31 ●	30 - 23 ●	22 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201036 **BORG Klagenfurt** **9020 Hubertusstraße 1**

8C Mag. Mirjam Schönlaub

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Von einem viereckigen Waldgrundstück ABCD sind folgende Bestimmungsstücke gegeben: 10 •
   AB = 300,2 m, BC = 123,3 m, CD = 189,7 m, DA = 234,2 m, $\angle ABC = 113{,}25°$.
   a) Berechne den Flacheninhalt des Grundstücks in m^2.
   b) Der Besitzer bekommt folgende Angebote:
      - Angebot 1: Anzahlung sofort 65000 €, den Rest in 10 nachschüssigen Jahresraten in der Höhe von jeweils 6500 €.
      - Angebot 2: Anzahlung sofort: 50000 €, nach 5 Jahren 40000 € und nach weiteren 5 Jahren 40000 €.

      Zur Zeit beträgt der m^2-Preis eines Waldes 3,5 €. Kalkuliert wird mit 4% p.a. Begründe in ganzen Sätzen, ob der Besitzer eines der Angebote wählen sollte oder nicht.

   [**Lösungen:** a) A = 36345,97 m^2 b) E_1 = 174255,57 € E_2 = 162678,33 € E = 188303,20 €]

2. Eine zur y-Achse symmetrische Polynomfunktion 4. Ordnung hat in P(-2/-11) eine horizontale Tangente und schneidet die y-Achse im Punkt Q(0/5). 10 •
   a) Ermittle die Funktionsgleichung.
   b) Diskutiere die Funktion $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ und zeichne ihren Graphen in [-2,75;2,75]. Einheit auf der x-Achse: 2 cm, Einheit auf der y-Achse: 1 cm.
   c) Berechne den Gesamtinhalt der zwischen der Kurve und der x-Achse liegenden Flächenstücke.
   d) Diese Flächenstücke rotieren um die x-Achse. Berechne das Volumen des Rotationskörpers.

   [**Lösungen:** a) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 5$ b) $N_{12}(\pm 2{,}7/0)$ $N_{34}(\pm 0{,}83/0)$ H(0/5) $T_{12}(\pm 2/-11)$ $W_{12}(\pm 1{,}15/-3{,}88)$
   c) $A = 2 \cdot 12{,}994 + 5{,}408 = 32{,}396$ d) $V = 2 \cdot 111{,}88\pi + 21{,}47\pi = 770{,}41$]

3. Der Ellipse ell: $4x^2 + 25y^2 = 100$ soll das flächengrößte Rechteck eingeschrieben werden. 10 •
   a) In welchem Verhältnis stehen die Volumina von Rotationsellipsoid und Drehzylinder, wenn beide Figuren um die x-Achse rotieren?
   b) In welchem Winkel schneiden sich die Tangenten an die Ellipse, die durch den Schnittpunkt des Rechtecks mit der Ellipse gehen?

   [**Lösungen:** a) $V_Z = \frac{20\pi}{\sqrt{2}}$ $V_{ell} = \frac{80\pi}{3}$ $V_Z : V_{ell} = 3 : 4 \cdot \sqrt{2}$ b) 163,40° / 43,60°]

4A Eine Firma erhält den Auftrag, Blechplatten mit einer Starke von 1 mm mit einer Toleranz von ± 0,05 mm zu liefern. Zur Herstellung stehen zwei Maschinen zur Verfügung, wobei der Entstehungspreis pro Platte bei der ersten Maschine 140 €, bei der zweiten Maschine 120 € beträgt. Auch die Dickenschwankungen während der Produktion sind bei beiden Maschinen verschieden. Zur Preiskalkulation wird mit beiden Maschinen je ein Probelauf gefahren, aus denen je eine Stichprobe zu 15 Stück entnommen wird. 10 ●

- 1. Maschine (Stärke in mm):
  1,03; 1,02; 0,95; 1,01; 0,96; 1,06; 0,99; 1,00; 0,99; 0,98; 1,00; 1,01; 0,96; 1,02; 0,97
- 2. Maschine (Stärke in mm):
  0,94; 1,02; 1,03; 0,93; 0,98; 1,02; 1,01; 0,97; 0,94; 0,97; 1,01; 0,98; 0,95; 0,98; 1,00

Nimm an, dass es sich um Stichproben aus annähernd normalverteilten Grundgesamtheiten mit gleichen Mittelwerten und gleichen Standardabweichungen handelt. Wie groß ist ungefähr der zu erwartende Ausschuss bei beiden Maschinen, wie hoch der Preis pro regulärer Blechplatte?

4B Die Zufallsgröße X bezeichne die Anzahl der Stunden, die ein Computer in einer bestimmten Familie im Durchschnitt pro Tag in Betrieb ist. Für die Zufallsgröße gelte folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

X	P(X = x)
0	0,1
1	0,15
2	0,3
3	0,25
4	0,15
5	0,05
≥ 6	0

a) Zeichne ein Histogramm der Zufallsgröße X mit $\Delta x = 1$.

b) Gib die Wertetabelle der Verteilungsfunktion F von X an und zeichne ihren Graphen.

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Computer

   c1) weniger als 4 Stunden,

   c2) mehr als 1 Stunde, aber höchstens 4 Stunden,

   c3) mindestens 3 Stunden

   in Betrieb?

[**Lösungen:** [A] M1: 8,62% 153,21 € M_2: 16,58% 143,85 € [B] c1) 0,8 c2) 0,7 c3) 0,45]

40 - 38 ●	37 - 33 ●	32 - 27 ●	26 - 20 ●	19 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Der Brennpunkt der Parabel mit der Gleichung $y^2 = 8x$ ist gleichzeitig Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius r = 6 cm. 12 ●
   a) Berechne die Gleichung des Kreises, die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Kurven und die Größe des Schnittwinkels.
   b) Fertige eine Zeichnung an (Einheit 1 cm).
   c) Die von den beiden Kurven eingeschlossene Fläche rotiert um die x-Achse. Berechne den Inhalt dieses Volumens. In welchem Verhältnis stehen die 2 Teilvolumina zueinander?
   d) In den Parabelabschnitt, der durch die senkrechte Gerade durch die zwei Schnittpunkte begrenzt wird, ist ein Rechteck so einzuschreiben, dass sein Flächeninhalt maximal wird. Berechne die Seitenlängen dieses Rechtecks. Begründe, dass es sich um ein Maximum handelt.

[**Lösungen:** a) $(x - 2)^2 + y^2 = 36$ $S_{12}(4/\pm 4 \cdot \sqrt{2})$ 125,26° / 54,74° c) $V = 64\pi + \frac{224\pi}{3} = \frac{416\pi}{3}$ $V_1 : V_2 = 6 : 7$

d) $a = \frac{8}{3}$ $b = \frac{8}{3} \cdot \sqrt{6}$]

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Um welche Funktion handelt es sich? Was kannst Du bereits jetzt über ihren Verlauf sagen? 12 ●
   a) Berechne die Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte sowie den Wendepunkt der Funktion.
   b) Zeichne den Graphen der Funktion (Einheit 1 cm).
   c) Die Funktion wird durch die Gerade, die durch den Ursprung und den Wendepunkt verläuft, in zwei Teilbereiche zerlegt. Berechne alle Schnittpunkte dieser Geraden mit der Funktion. Zeige, dass diese so entstandenen Teilflächen gleich groß sind.

[**Lösungen:** a) $N_1(0/0)$ $N_2 = T(3/0)$ $H(1/4)$ $T_{12}(\pm 2/-11)$ $W(2/2)$ c) $S_1 = N_1$ $S_2 = W$ $S_3(4/4)$ $A_1 = A_2 = 4$]

3. Ein Beobachter befindet sich auf der Aussichtsplattform des Pyramidenkogels in 850 m Seehöhe. Mit einem Theodoliten führt er folgende Messungen aus: Von seinem Standort bis zum Westportal des EM-Fußballstadions die Entfernung von 9120 m und nach Schwenken des Zielfernrohres um den Horizontalwinkel 28,5° die Länge von 6210 m zur Schiffsanlegestelle in Krumpendorf. Der Wörthersee liegt auf 440 m Seehöhe. Das Gelände um den See wird in einer Ebene liegend angenommen. 12 ●
   a) Fertige eine räumliche Skizze an.
   b) Berechne die Entfernung von Krumpendorf bis zum Stadion und erläutere die Rechenschritte.
   c) Herr Maier beabsichtigt mit einem Ruderboot von Krumpendorf nach Klagenfurt zu fahren und die restliche Wegstrecke von 1 km zu Fuß zurückzulegen. Er will zum Eröffnungsspiel um 20 Uhr auf alle Fälle rechtzeitig ankommen. Wie spät muss er mindestens in Krumpendorf wegfahren, wenn er mit dem Boot ca. 5 km/h und zu Fuß 4 km/h zurücklegt und eine Stunde vor Spielbeginn beim EM Stadion ankommen will?
   d) Unter welchem Tiefenwinkel erscheint dem Beobachter das Klagenfurter EM-Stadion?

[**Lösungen:** b) 4,7 km c) 18:00 d) 2,6°]

4. Im Rahmen einer sportlichen Großveranstaltung findet eine große Tombola statt. Insgesamt werden 10000 Lose ausgegeben, 3000 davon sind Gewinnlose. 12 ●

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 12 gekauften Losen genau 3 Gewinnlose zu erhalten?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei 12 gekauften Losen mindestens 2 Gewinnlose zu erhalten?

c) Wie viele Gewinnlose muss man kaufen, um mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit mit mindestens einem Gewinn rechnen zu können?

d) Was ist wahrscheinlicher: bei 10 gekauften Losen 3 Gewinnlose zu erhalten oder bei 12 gekauften Losen 4 Gewinnlose zu erhalten?

e) Erläutere die Rechenschritte und Überlegungen der Punkte a) bis d).

[**Lösungen:** a) 0,240 b) 0,915 c) 7 d) P_3 = 0,267 P_4 = 0,231]

48 - 43 ●	42 - 37 ●	36 - 30 ●	29 - 24 ●	23 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Für eine Schar von Funktionen gilt: $x \to \dfrac{a+b\cdot\ln x}{x}$ (a, b $\neq$ 0; a, b $\in \mathbb{R}$).

   a) Beweisen Sie, dass f(x) = $\dfrac{1+2\cdot\ln x}{x}$ eine Termdarstellung jener Funktion ist, die den Hochpunkt H($\sqrt{e}$ / $\dfrac{2}{\sqrt{e}}$) hat. 4 •

   b) Bestimmen Sie die größtmögliche Definitionsmenge und untersuchen Sie diese Funktion auf Nullstellen, Extremstellen, Art der Extrema und Wendepunkte. 8 •
   [Kontrolle: f'(x) = $\dfrac{1-2\cdot\ln x}{x^2}$, f''(x) = $\dfrac{-4+4\cdot\ln x}{x^3}$]

   c) Wie lautet die Gleichung der Wendetangente? 2 •

   d) Zeichnen Sie den Funktionsgraphen in]0;3]. 2 •

   e) Berechnen Sie den Inhalt der vom Funktionsgraphen, der x-Achse und den Geraden x = 1 und x = e eingeschlossene Fläche. 4 •

   [**Lösungen:** b) N(0,61/0) H(1,65/1,21) W(e/1,1) c) y = -0,135·x + 1,47 e) A = 2]

2A Philipp und Christopher fahren jeweils mit dem PKW auf zwei einander normal kreuzenden Straßen. Philipp hat vom Kreuzungspunkt der Straßen (= Kreuzung) einen Abstand von a = 190 m und fährt von der Kreuzung mit der Geschwindigkeit v_1 = 10 m/s weg. Christopher hat auf der anderen Straße von der Kreuzung den Abstand b = 300 m und fährt in Richtung der Kreuzung mit der Geschwindigkeit v_2 = 15 m/s. 10 •

   a) Fertigen Sie eine Skizze an!

   b) Wann ist die Entfernung der beiden am kleinsten?

   c) Wie weit sind sie dann voneinander entfernt?

   [**Lösungen:** b) t = 8 s c) d_{min} = 324,5 m]

2B Erläutern Sie den Unterschied zwischen Differenzen- und Differentialquotient (Definition, Interpretation und Deutung mit Hilfe einer Skizze). Geben Sie je ein Beispiel an, welche Bedeutung die erste und die zweite Ableitung einer Funktion in der Geometrie und in der Physik haben können. 10 •

3A Das Medikament MTR (**M**ATHE**TR**ANQUILIZER; lat. tranquillare = beruhigen) hat eine Halbwertszeit von sieben Stunden. Um die beruhigende Wirkung bei Mathematikschularbeiten zu optimieren, sind der Zeitpunkt der Einnahme und die richtige Dosierung des Medikamentes sehr wichtig. Eine Tablette beinhaltet 0,6 g des Wirkstoffes. 8 •

   a) Ermitteln Sie die Zerfallskonstante λ.

   b) Geben Sie die prozentuelle Abnahme auf 1 Dez. genau an.

   c) Stellen Sie eine Zerfallsformel auf zwei Arten auf (mit und ohne Verwendung der Euler'schen Zahl).

   d) Julia nimmt am Tag vor der Mathematikmatura um 20 Uhr eine Tablette zu sich. Um 7 Uhr morgens nimmt sie eine weitere Tablette zu sich. Wie viel Gramm des Wirkstoffes hat Julia um 12 Uhr noch im Körper?

   e) Berechnen Sie, wann nach der Verabreichung der ersten Tablette im Körper von Julia weniger als 0,1 g des Wirkstoffes nachzuweisen wäre.

3B Eine unendliche Zahlenfolge b_n ist gegeben durch $<\frac{2}{5}, -\frac{2}{7}, -\frac{6}{9}, -\frac{10}{11}, \ldots>$. 12 ●

a) Beweise Sie, dass $b_n = \frac{6-4n}{3+2n}$ die Abbildungsgleichung der Folge ist.

b) Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von b_n (Vermutung, Beweis).

c) Bestimmen Sie den Grenzwert b und jenen Index m, von dem ab alle Glieder der Folge in der Umgebung $U(b;0{,}002)$ liegen. Interpretieren Sie das Ergebnis und formulieren Sie eine entsprechende Antwort.

[**Lösungen:** [A] a) $\lambda = 0{,}099021$ b) 9,4% d) 0,4888 g e) 18,09 h [B] c) b = 2 m = 2999]

4A Paul, das Tennisgenie der 8A, trainiert beinahe täglich in der HOSKA (Horst Skoff Akademie). Zum regelmäßigen Training gehört seit Jahren auch das Üben des Aufschlages (Service). Paul trifft 70% seiner ersten Aufschläge in das Feld des Gegners.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Paul bei einer Serie von 4 Aufschlägen i) mindestens drei erste Aufschläge ins Feld trifft, ii) genau zwei erfolgreiche Versuche hat? 3 ●

b) Wie oft muss Paul aufschlagen, damit er mit 90%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einmal einen ersten Aufschlag ins Feld trifft? (Ansatz mittels Ungleichung!) 2 ●

c) Klassenkollege Max spielt mit Paul ein Tennis-Doppel. Nach dem gewonnenen Doppel analysieren die beiden ihre Aufschläge. Paul setzte 65% aller ersten Aufschläge der beiden in das gegnerische Feld, Max nur 35%. Paul erzielte mit 30% seiner ersten Aufschläge ein Ass (ein Ass - engl. Ace - ist ein Aufschlag, bei dem der geschlagene Ball vom Gegner nicht erreicht werden konnte), Max hatte eine Assquote von 10% beim ersten Aufschlag. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielte einer der beiden mit einem ersten Aufschlag ein Ass? Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammte ein Ass von Paul? Zeichnen Sie ein Baumdiagramm! 3 ●

4B Das Gewicht von neugeborenen Kindern sei normalverteilt mit $\mu = 3200$ g und $\sigma = 800$ g. 12 ●
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes

a) mehr als 3000 g

b) weniger als 2500 g

c) zwischen 4000 g und 5000 g wiegt?

Wie schwer muss ein Neugeborenes sein (runde auf 10 g), damit es

d) zu den 15% schwersten

e) zu den 25% leichtesten gehört?

f) In welchem symmetrischen Bereich $[\mu - \varepsilon; \mu + \varepsilon]$ liegen die Gewichte von 90% aller Neugeborenen? Überlegen Sie den Ansatz jeweils anhand einer Skizze.

[**Lösungen:** [A] ai) 0,652 aii) 0,245 b) 2 c) P(Ass) = 0,23 P(Paul|Ass) = 0,848 [B] a) 0,599 b) 0,189 c) 0,147 d) ≈ 4030 g e) ≈ 2660 g f) [1880;4520]]

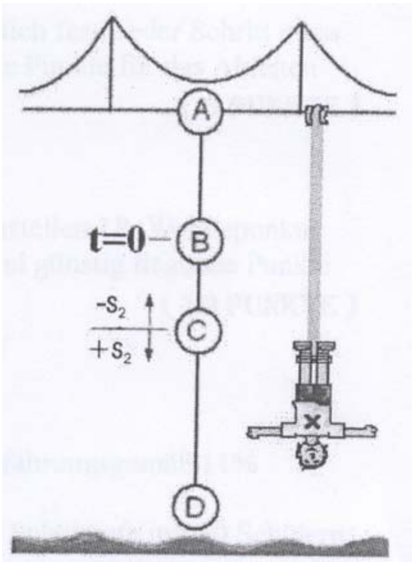
80 - 71 ●	70 - 61 ●	60 - 50 ●	49 - 40 ●	39 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201046 **BG/BRG Klagenfurt Lerchenfeldstraße** **9020 Lerchenfeldstraße 22**
8S Mag. Helgrid Müller

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Differential- und Integralrechnung

Ein mutiger Bungee-Springer wagt einen Sprung von einer 130 m hohen Brücke (Startpunkt A), die über einen Fluss führt. Das Gummiseil ist 20 m lang. Er fällt also 20 m frei (konstante Geschwindigkeitsfunktion $v_1(t)$), bis die Elastizität des Seils zu wirken beginnt. Die Erdbeschleunigung kann mit 10 m/s^2 angenommen werden. Wenn der Springer mit seiner Falltiefe das Ende des Gummiseils, also Punkt B erreicht hat, endet die Geschwindigkeitsfunktion $v_1(t)$ und damit auch die Weg-Zeit-Funktion $s_1(t)$. Sie gehen im Punkt B über in eine Weg-Zeit-Beziehung $s_2(t)$ einer gedämpften Schwingung und deren Geschwindigkeitsfunktion $v_2(t)$. Wegen Reibungsverlusten wird der Springer nach einigen Auf- und Abschwingungen irgendwo zum Stillstand kommen (Seilmasse und Luftwiderstand können vernachlässigt werden).



$$s_2(t) = e^{-\frac{t}{10}} \cdot \left(60 \cdot \cos\frac{7t}{10} - 20 \cdot \sin\frac{7t}{10}\right)$$

a) Welche Geschwindigkeit $v_1(t)$ hat der Bungee-Springer nach 20 m freiem Fall (Punkt B)? 3 •

b) Welche Bedeutung haben die Extremwerte der Funktion $s_2(t)$? 1 •
Welche Bedeutung haben die Nullstellen dieser Funktion?

c) Wie lange ist die Strecke zwischen B und C? 1 •
Welche Seillänge l_E stellt sich ein, wenn der Bungee-Springer nach einigen Auf- und Abschwingungen theoretisch zum Stillstand kommt (Punkt C)?

d) Berechne den Zeitpunkt (vom Punkt A gerechnet), an dem das Seil maximal gestreckt ist, und gib an, wie knapp sich dann der Bungee-Springer über der Wasseroberfläche befindet (Punkt D). Wird er eventuell eintauchen? 5 •

e) Wie weit schwingt er wieder hinauf? Gib den Höhenunterschied in Bezug auf Punkt A an. 2 •

f) Berechne den Zeitpunkt (vom Punkt A gerechnet), an dem der Bungee-Springer den Punkt C erstmalig passiert. 4 •

[**Lösungen:** a) 72 km/h c) BC = 60 m l_E = 80 m d) t = 3,83 s s = 122,7 m e) 52,74 m f) 1,78 s]

2. Integralrechnung - Volumsberechnung

Ein 6 cm hohes Sektglas entsteht durch Drehung der Ellipse $4x^2 + 16y^2 = 64$ und der Funktion $y = \frac{5}{48}x^2 + 1$ um die positive y-Achse. Die Ellipse bildet dabei den Standfuß sowie den gewölbten Boden des Glases, die Funktion f(x) den eigentlichen Schalenaufbau.

a) Skizziere die Gestalt der Schale möglichst genau und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte beider Kurven. 6 •

b) Welche Menge Sekt (in l) können Maturanten trinken, wenn das Glas bis 2 cm unter den oberen Rand gefüllt ist? 4 •

c) Bei Sekt-Orange wird nur die Hälfte dieser Menge an Sekt in die Gläser gefüllt und der Rest mit Orangensaft gefüllt. Bis zu welcher Höhe muss bei Sekt-Orange Sekt eingefüllt werden? 6 •

[**Lösungen:** a) $S_{12}(\pm2{,}4/1{,}6)$ b) 0,127 l c) 3,192 cm]

3. Differentialrechnung - Kurvendiskussion

Diskutiere die gebrochen rationale Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},\ y = \frac{x^3}{(x-2)^2}$

a) Erstelle die Ableitungen y', y'' y''', vereinfache die Terme und halte jede Umformung schriftlich fest. Jeder Schritt muss dokumentiert sein! (Ist nicht alles dokumentiert, werden die Punkte für das Ableiten abgezogen.) 6 •

[Kontrolle: $y' = \frac{x^3 - 6x^2}{(x-2)^3}$, $y'' = \frac{24x}{(x-2)^4}$, $y''' = \frac{-72x - 48}{(x-2)^5}$ *]*

b) Ermittle Nullstellen, Extremstellen, Art der Extremstellen, Wendepunkte, Steigung der Wendetangenten, Asymptoten sowie zwei günstig liegende Punkte mit Tangentensteigung und zeichne den Graphen. 10 •

[**Lösungen:** b) N = W(0/0) y'(0) = 0 T(6/13,5) a_1: x = 2 a_2: y = x + 4]

4. Wahrscheinlichkeitsrechnung

a) Unter den österreichischen Gymnasiasten befinden sich erfahrungsgemäß 11% Hausübungsabschreiber.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer Schulstufe mit 50 Schülern genau 2 / mindestens 3 Hausübungsabschreiber befinden? 2 •

ii) Unter wie vielen Schülern einer unendlich großen Grundmenge ist mit 98%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Hausübungsabschreiber zu erwarten? 3 •

iii) Ein Lehrer kontrolliert pro Woche ca. 200 Schüler. Wie viele Hausübungsabschreiber wird er wöchentlich im Mittel finden? 1 •

b) Jemand hat 8 Paar Socken, die durcheinander liegen. 6 •
Er wählt im Dunkeln eine Socke nach der anderen aus. Spätestens nach der 9. Socke muss er das erste Paar zusammengehöriger Socken ausgewählt haben. Berechne, welches der folgenden Ereignisse das wahrscheinlichste ist:

i) Man hat das gewünschte Paar Socken genau beim zweiten Griff.
ii) Man hat das gewünschte Paar Socken genau beim dritten Griff.
iii) Man hat das gewünschte Paar Socken genau beim vierten Griff.
iv) Man hat das gewünschte Paar Socken genau beim fünften Griff.
v) Man hat das gewünschte Paar Socken genau beim sechsten Griff.
vi) Man hat das gewünschte Paar Socken genau beim siebenten Griff.

c) Erfahrungsgemäß nehmen 4% aller Hotelgäste, die ein Zimmer reservieren lassen, dieses nicht in Anspruch. Das Hotelmanagement weiß dies und reserviert 50 Zimmer, obwohl nur 47 verfügbar sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese in der Praxis übliche Überbuchung gut geht? 4 •

[**Lösungen:** ai) 0,055 0,924 aii) 34 aiii) 22 b) $P_5 = 0{,}205$ c) 0,323]

5. Trigonometrie

Von der Spitze eines h Meter hohen Turmes sieht man den Geländepunkt A unter dem Tiefenwinkel α und nach Schwenken des Fernrohrs um den Horizontalwinkel φ den Geländepunkt B unter dem Tiefenwinkel β. Ermittle die Entfernung von A und B rechnerisch und fertige eine Skizze an. 8 ●

h = 74,0 m, α = 26°, φ = 67°, β = 31°

[**Lösungen:** AB = 145,32 m]

6. Vektorrechnung - analytische Geometrie

Ein Lehrer möchte Philipp bei der Matura genau beobachten, um festzustellen, ob dieser schwindelt. Philipp soll von dieser Beobachtung natürlich nichts merken. Daher montiert der Lehrer einen kleinen Spiegel im Klassenzimmer, der die Lage der Ebene σ: x + 2y + 3z = -12 hat. Ein Auge des Lehrers hat die Koordinaten (-3/-4/-5). Blickt der Lehrer nun in die Mitte des Spiegels, so hat der Sehstrahl auf den Spiegel die Richtung (0/3/12). Der Kopf des Schülers hat ca. die Koordinaten (-7/-9/-5). Kann der Lehrer den Schüler im Spiegel beobachten? Wenn ja, warum? Beweise deine Antwort durch Rechnung. 8 ●

[**Lösungen:** P(-7/-9/-5) $\in$ r: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$]

80 - 72 ●	71 - 60 ●	59 - 48 ●	47 - 40 ●	39 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201056 **BG/BRG „Ingeborg Bachmann“ Klagenfurt** **9020 Ferdinand-Jergitsch-Straße 21**
8A Mag. Elisabeth Veszy

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Der Graph einer Polynomfunktion mit der Gleichung $y = x^3 + bx^2 + cx + d$ geht durch den Punkt P(2/2) und hat im Punkt T(1/-2) einen Tiefpunkt.

   a) Zeige, dass die Gleichung $y = x^3 - 3x$ lautet. 3 ●

   b) Ermittle die Definitionsmenge, alle Nullstellen und den Wendepunkt. 3 ●
   Besitzt die Funktion einen weiteren Extremwert?

   c) Stelle die Funktion grafisch dar. Welche Art der Symmetrie hat diese Funktion? 3 ●

   d) Berechne den Flächeninhalt, den der Funktionsgraph zwischen $-\sqrt{3}$ und $\sqrt{3}$ mit der x-Achse einschließt. Zeige, warum das Flächenintegral nicht von $-\sqrt{3}$ bis $\sqrt{3}$ durchgeführt werden kann. 3 ●

   [**Lösungen:** b) $N_1 = W(0/0)$ $N_{23}(\pm\sqrt{3}/0)$ H(-1/2) d) A = 4,5]

2. In einem Betrieb werden zur Herstellung von Leuchtstoffröhren drei Maschinen M_1, M_2 und M_3 eingesetzt. M_1 stellt 40%, M_2 35% und M_3 den Rest der Gesamtproduktion her. Aus Erfahrung ist bekannt, dass 1% der von M_1, 1,5% der von M_2 und 3% der von M_3 erzeugten Röhren fehlerhaft sind.

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine gekaufte Röhre fehlerhaft? 3 ●

   b) Eine gekaufte Röhre ist fehlerhaft. Von welcher Maschine wurde sie mit größter Wahrscheinlichkeit erzeugt? 3 ●

   c) Wie viel Stück müssen bei einer Qualitätskontrolle geprüft werden, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 90% mindestens eine fehlerhafte Röhre dabei ist? 3 ●

   d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist beim Kauf von 20 Stück höchstens eine Röhre fehlerhaft? 3 ●

   [**Lösungen:** a) 0,01675 b) $P(M_3|f) = 0{,}448$ c) 137 d) 0,956]

3. Die Punkte A(-4/1/5) und B(0/1/1) bilden die Basis eines gleichschenkeligen Dreiecks, dessen Eckpunkt C auf der Geraden g: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ liegt. Dieses Dreieck ist Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S(4/0/9).

   a) Zeige, dass der Eckpunkt C die Koordinaten C(-2/-3/3) hat. 4 ●

   b) Berechne die Höhe und das Volumen der Pyramide. 4 ●

   c) Die Pyramide wird von einer Ebene ε_1 geschnitten, die durch den Punkt A geht und normal zur Kante CS steht. Berechne die Schnittpunkte dieser Ebene mit den Kanten CS und BS. Interpretiere das Ergebnis. 4 ●

   [**Lösungen:** b) $h = 6 \cdot \sqrt{2}$ V = 32 c) $S_1(-\frac{10}{9}/-\frac{23}{9}/\frac{35}{9})$ $S_2 = B$ $AB \in \varepsilon_1$]

4. Eine Blumenschale, die 12 cm hoch ist, wird außen von einem (halben) Drehhyperboloid und innen von einem Drehparaboloid begrenzt. Die äußeren Abmessungen der Schale betragen: Grundkreisradius 12 cm, oberer äußerer Radius $12 \cdot \sqrt{2}$ cm.

Die Gleichung der Parabel, die durch Drehung das Paraboloid erzeugt, lautet: $y = \frac{1}{20}x^2 + 2$.

a) Zeige, dass die Hyperbel, die das Hyperboloid erzeugt, die Gleichung hyp: $x^2 - y^2 = 144$ besitzt. 3 ●

b) Fertige eine geeignete Zeichnung an. 3 ●

c) In die Schale werden 1,5 Liter Wasser gegossen. Wie hoch steht das Wasser in der Schale? 3 ●

d) Soll man diese mit 1,5 Liter Wasser gefüllte Glasschale auf ein Wandbord stellen, das mit maximal 11 kg belastet werden darf? (Dichte von Glas: 2,5 kg/dm^3) 3 ●

[**Lösungen:** c) 8,9 cm d) V = 4,097 dm^3 $m_{Schale} + m_{Wasser} = 10{,}24 + 1{,}5 = 11{,}74$ kg]

48 - 44 ●	43,5 - 39 ●	38,5 - 32,5 ●	32 - 24 ●	23,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201056 **BG/BRG „Ingeborg Bachmann“ Klagenfurt** **9020 Ferdinand-Jergitsch-Straße 21**
8B Mag. Heidemarie Smole

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Eine Blumenschale aus Glas von 12 cm Höhe ist außen von einem (halben) einschaligen Drehhyperboloid und innen von einem Drehparaboloid begrenzt. Die äußere Abmessung der Schale beträgt: Grundkreisradius 12 cm, oberer äußerer Radius $12 \cdot \sqrt{2}$ cm.

   Die Gleichung der Parabel, die durch Drehung das Paraboloid erzeugt, lautet $y = \frac{1}{20}x^2 + 2$.

   a) Bestimme die Gleichung der Hyperbel, die das Hyperboloid erzeugt. Gib die Brennpunkte und die Gleichungen der Asymptoten an (Skizze). 3 ●

   b) Berechne die Masse der Schale. (Dichte von Glas: $\rho = 2{,}5$ kg/dm^3) 3 ●

   c) In die Schale werden 1,5 l Wasser gegossen. Wie hoch steht das Wasser in der Schale? 3 ●

   [**Lösungen:** a) $x^2 - y^2 = 144$ b) m = 10,24 kg c) 6,91 cm]

2. Um die Höhe einer Felswand zu bestimmen, die am Ende einer gleichmäßig unter dem Winkel $\varepsilon = 22{,}9°$ ansteigenden Talsohle senkrecht aufragt, wird in der Talsohle eine Standlinie von 427 m in Richtung der Felswand abgesteckt. In den Endpunkten der Standlinie werden die Höhenwinkel $\alpha = 38{,}53°$ und $\beta = 51{,}4°$ zur Spitze der Felswand gemessen.

   a) Fertige eine Skizze an. 2 ●

   b) Berechne die Höhe der Felswand. 3 ●

   c) Unter welchem Sehwinkel (Öffnungswinkel) erscheint die Standlinie AB einem Kletterer, der sich auf halber Höhe in der Wand befindet? 3 ●

   [**Lösungen:** b) 267,53 m c) 8,59°]

3. Von einem Dreieck ABC kennt man A(-12/-4), den Mittelpunkt M_a(1/7) von BC und den Umkreismittelpunkt U(-4/2).

   a) Berechne die fehlenden Eckpunkte B und C. 2 ●

   b) Zeige die Gültigkeit folgender Aussage: Spiegelt man den Höhenschnittpunkt an den Dreieckseiten, so liegen die gespiegelten Punkte H_a, H_b, H_c auf dem Umkreis des Dreiecks. 5 ●

   c) Was versteht man beim Dreieck unter der Eulerschen Geraden? Was gilt für diese Gerade? 1 ●

   [**Lösungen:** a) B(6/2) C(-4/12) b) H(-2/6)]

4. Der Graph von f: $y = 4 \cdot e^{-\frac{3x}{4}}$ wird von einer Parabel p: $y^2 = ax + b$ im Punkt P(0/y) rechtwinkelig geschnitten.

   a) Berechne den Punkt P und zeige, dass a = 8/3 und b = 16 ist. 3 ●

   b) Zeichne beide Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem (Einheit 1 cm). 2 ●

   c) Berechne die Fläche, die von den Funktionsgraphen und der x-Achse begrenzt wird. 3 ●

   [**Lösungen:** a) P(0/4) c) $A_p + A_f = 16 + \frac{16}{3} = 21{,}3$]

32 - 30 ●	29 - 26 ●	25 - 21 ●	20 - 16 ●	15 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Gegeben ist die Funktion f(x): $y = e^x \cdot \sin x$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$.

   a) Bestimme den Definitionsbereich und berechne die Nullstellen, die Extremwerte und die Wendepunkte von f im Intervall $[0;\pi]$ und zeichne dafür exakt den Graphen. Erweitere den Graphen auf das Intervall $[-\pi;2\pi]$ und skizziere seinen charakteristischen Verlauf (zu große y-Werte werden ausgelassen). 4 •

   b) Die Funktion schließt mit der x-Achse größer werdende Flächenstücke ein. Berechne den Flächeninhalt A_1, A_2 und A_3 von 3 aufeinander folgenden Flächenstücken im Intervall $[0;3\pi]$. Leite daraus eine allgemeine Formel für die Fläche A_n her. 4 •

[**Lösungen:** a) $N_1(-\pi/0)$ $N_2(0/0)$ $N_3(\pi/0)$ $N_4(2\pi/0)$ $H(\frac{3\pi}{4}/7{,}4)$ $T_1(-\frac{\pi}{4}/-0{,}32)$ $T_2(\frac{7\pi}{4}/-172{,}6)$ $W_1(-\frac{\pi}{2}/-0{,}2)$ $W_2(\frac{\pi}{2}/4{,}8)$ $W_3(\frac{3\pi}{2}/-111{,}3)$ b) $A_n = \frac{e^{(n-1)\cdot\pi}}{2}\cdot(e^{\pi}+1)$]

2. Gegeben sind die beiden Parabeln p_1: $y^2 = a^2 - a\cdot x$ und p_2: $y^2 = a^2 - \frac{x}{a}$ mit $a > 0 \in \mathbb{R}$ konstant.

   a) Berechne ihre Nullstellen, Scheitelpunkte und Schnittpunkte und schließe daraus auf ihre Lage. 2 •

   b) Fertige eine Zeichnung für a = 2 und eine zweite für a = 1/2 an. Beschreibe den Einfluss des Parameters a > 0 auf die gegenseitige Lage der Parabeln. 2 •

   c) Die von p_1 und p_2 eingeschlossene Fläche rotiert um die x-Achse. 3 •
   Zeige, dass das Volumen des Rotationskörpers $V(a) = \frac{\pi}{2}\cdot(a^3 - a^5)$ ist, wenn 0 < a < 1 ist.

   d) Diskutiere die vereinfachte Volumsfunktion $V(a) = a^3 - a^5$ und zeichne ihren Graphen. Interpretiere den Verlauf des Graphen für alle a > 0 und stelle fest, für welchen Wert von $a \in]0;1[$ das Volumen am größten wird. 3 •

[**Lösungen:** a) p_1: N(a/0) p_2: N(a^3/0) $S_{12}(0/\pm a)$ d) $N_1(0/0)$ $N_{23}(\pm 1/0)$ $H(\sqrt{\frac{3}{5}}/0{,}2)$ $T(-\sqrt{\frac{3}{5}}/-0{,}2)$ $W_{12}(\pm\sqrt{\frac{3}{10}}/\pm 0{,}1)$]

3. Von einer quadratischen Pyramide ABCDS kennt man die Punkte A(-1/-2/5), B(3/2/3), C(1/6/7) und die Spitze S(2/1/8).

   a) Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinkelig und gleichschenkelig ist und berechne den Eckpunkt D sowie den Mittelpunkt F der Grundfläche. 3 •

   b) Zeige, dass die Pyramide gerade ist und spiegle die Spitze S an der Grundfläche ABCD. Berechne die Länge der Körperhöhe und das Volumen der Pyramide. 3 •

[**Lösungen:** a) AB = BC = 6 D(-3/2/9) F(0/2/6) b) h = 3 V = 36]

4. Ein Betrieb erzeugt Werkstücke, von denen 6% fehlerhaft sind. In einem Test werden 11 Werkstücke produziert. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der fehlerhaften Werkstücke.

a) Berechne die gesamte Binomialverteilung und zeichne die Wahrscheinlichkeits- und die Verteilungsfunktion. Berechne den Erwartungswert und die Standardabweichung und beschreibe in Worten, was sie aussagen. 3 •

b) Berechne folgende Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der Tabelle aus a): kein fehlerhaftes / höchstens 2 fehlerhafte / mindestens 2 fehlerhafte Werkstücke. 2 •

c) Die Aussage, der Anteil der fehlerhaften Werkstücke sei p = 0,06 wird bezweifelt und es wird behauptet, er sei größer. Wie muss jeweils die Entscheidungsregel die Annahme dieser Behauptung lauten, wenn man eine Irrtumswahrscheinlichkeit von $\alpha = 5\%$ / $\alpha = 1\%$ in Kauf nimmt? 3 •

[**Lösungen:** a) E(X) = 0,66 $\sigma = 0{,}78$ b) $P(X=0) = 0{,}506$ $P(X\leq 2) = 0{,}975$ $P(X\geq 2) = 0{,}138$ c) $p \geq 0{,}06$ für $X\geq 3$ / $X\geq 4$]

32 - 30 •	29 - 26 •	25 - 21 •	20 - 16 •	15 - 0 •
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201056 **BG/BRG „Ingeborg Bachmann“ Klagenfurt** **9020 Ferdinand-Jergitsch-Straße 21**
8C^R Dr. Arnulf Schönlieb

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

---

1. Die hoch ansteckende Grippe (Influenza) ist eine potentiell lebensbedrohende Krankheit, die häufig in Epidemieform auftritt. Nach einer kurzen Inkubationszeit kommt es in der Regel zu einem raschen Ansteigen der Anzahl erkrankter Personen. Vereinfacht kann der Verlauf einer Grippeepidemie durch die Funktion $E(t) = (120 \cdot t - 60) \cdot e^{-t}$ beschrieben werden (t in Wochen, $t > 0$). E(t) gibt dabei den Anteil der erkrankten Personen in Prozenten an der Gesamtbevölkerung in einer bestimmten Region an.

   a) Mit welcher Inkubationszeit rechnet man in obigem Modell? 1 •

   b) Wie viel Prozent der Bevölkerung sind nach einer Woche erkrankt? 1 •
   Mit welcher prozentuellen Zunahme pro Woche muss man zu diesem Zeitpunkt rechnen?

   c) Wann ist der Höhepunkt der Epidemie erreicht? 2 •
   Wie viel Prozent der Bevölkerung sind zu diesem Zeitpunkt erkrankt?

   d) Die Funktion E(t) besitzt einen Wendepunkt. Berechne seine Koordinaten und interpretiere seine Bedeutung im Hinblick auf den Verlauf der Epidemie. 2 •

   e) Welchen Verlauf nimmt die Epidemie langfristig? 2 •
   Skizziere ihren Verlauf möglichst genau!

   [**Lösungen:** a) t = 0,5 b) E(1) = E'(1) = 22,07% c) t = 1,5 26,77% d) (2,5/19,7)]

2. Der Abstand eines Eckpunktes vom Höhenschnittpunkt ist doppelt so groß wie der Abstand des Umkreismittelpunktes von der diesem Eckpunkt gegenüberliegenden Seite. Beweise die Richtigkeit dieses allgemeinen Satzes über Dreiecke anhand des Dreiecks A(4/6), B(-6/2), C(-2/-6), indem du

   a) die Koordinaten von H und U berechnest und 4 •

   b) die entsprechenden Abstandsverhältnisse nachweist. 2 •

   c) Bestimme die Gleichung des Umkreises und kontrolliere die Berechnungen auch anhand einer Skizze 2 •

   [**Lösungen:** a) $H(-5/\frac{3}{2})$ $U(\frac{1}{2}/\frac{1}{4})$ b) $EH = \frac{3 \cdot \sqrt{29}}{2} = 2 \cdot UH$ c) $(x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{4})^2 = \frac{725}{16}$]

3. Die Form einer bauchigen Vase mit schmalem Hals kann recht gut durch die Funktion $f(x) = \frac{x^2}{16} \cdot \sqrt{13 - x}$ entlang der positive x-Achse im Intervall $[4;12]$ beschrieben werden.

   a) Berechne oberen und unteren Durchmesser der Vase und skizziere ihre Form. 2 •

   b) Berechne das Volumen, wenn die Vase bis 2 cm unter den oberen Rand gefüllt ist. 2 •

   c) Zeige, dass das Wasser nahezu übergeht, wenn man noch 1/8 Liter Flüssigkeit dazugießen würde. 2 •

   d) Erkläre anhand einer Skizze, wie man mit Hilfe von Stammfunktionen Volumsberechnungen durchführen kann. 2 •

   [**Lösungen:** a) 6 cm 18 cm b) $V \approx 1{,}68$ l c) $V_{ges} \approx 1{,}81$ l]

4. Bäckermeister Brösel stellt seine Spezialität „Zarte Küsschen“ in den Geschmacksvarianten „Vanille“ und „Himbeer“ her. Die ziemlich große Anzahl dieser Leckereien wird gemischt und anschließend in Tüten zu je 15 Stück zufällig abgefüllt Der Anteil der „Himbeerküsschen“ liegt dabei erfahrungsgemäß bei 40%.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde aus einer Packung „Zarte Küsschen“ 3 ●

      i) weniger als 2 Himbeerküsschen genießen kann?

      ii) höchstens 3 Vanilleküsschen verspeisen kann?

   b) Susi Süß, Schleckermäulchen aus Passion, erlebte bei ihrem letzten Einkauf ihr 2 ● süßes Wunder. In der Packung „Zarte Küsschen“ befand sich nur ein einziges Vanilleküsschen. Wie wahrscheinlich ist ein solches oder noch schlechteres Ergebnis?

   c) Susi vermutet, dass Brösels Küsschen insgesamt weniger Vanilleküsschen enthalten 3 ● und beschließt, die Verteilung der Küsschen genauer unter die Lupe zu nehmen. Dazu kauft sie 10 Packungen und sortiert die Küsschen nach Sorten. Es sind insgesamt 74 Vanilleküsschen. Kann Susi ihre Vermutung statistisch beweisen? Führe einen entsprechenden statistischen Test durch (5% Irrtumswahrscheinlichkeit)!

   [**Lösungen:** ai) 0,0052 aii) 0,00193 b) 0,000025 c) x_k = 80,3]

32 - 29,5 ●	29 - 25,5 ●	25 - 20,5 ●	20 - 16 ●	15,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201066 **BG/BRG für Slowenen Klagenfurt** **9020 Prof.-Janezic-Platz 1**
8A

201076 **BRG Klagenfurt-Viktring** **9073 Stift-Viktring-Straße 25**
8A Mag. Gabriela Rieger

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Der Grundriss eines Verkaufszeltes ist das Viereck ABCD. AB = a = 7,5 m, BC = b = 8 m, AD = d = 9,2 m, α = 104°, β = 115°. Im Schnittpunkt F der Diagonalen wird ein 7 m hoher Mast FS zur Spitze S des Zeltes aufgestellt. 20 •
   a) Mache eine Skizze des Vierecks und berechne die Diagonalen e (= AC) und f (= BD), alle Winkel im Dreieck ABF, den Flächeninhalt der Grundfläche, das Volumen und die Kantenlänge AS des Zeltes.
   b) Die Kraft y (in Newton), die der Wind auf das Zelt ausübt, nimmt mit der Windgeschwindigkeit x (in m/s) nach der Ungleichung $y \le 52x^2$ zu. Wie groß ist die Windkraft bei 10 km/h maximal? (1 m/s = 3,6 km/h) Das Zelt hält Windkräften bis 3200 N stand. Bei welcher Windgeschwindigkeit muss das Zelt abgebaut werden?

   [**Lösungen:** a) e = 13,075 m f = 13,201 m A = 83,822 m^2 V = 195,584 m^3 AS = 8,733 m b) 401,235 N 28,241 km/h]

2. Die beiden Kurven $y = x^2 + 1$ und $25x^2 - 4y^2 = 100$ bilden im 1. Quadranten mit der Geraden y = 8 eine endliche Fläche. Durch Rotation dieser Fläche um die y-Achse entsteht ein Schnapsglas. 20 •
   a) Mache eine Zeichnung (mit Wertetabelle).
   b) Berechne das Fassungsvermögen dieses Schnapsglases.
   c) Berechne die Höhe des Flüssigkeitsstandes, wenn sich 4 cl (= 40 cm^3) Tequila im Glas befinden.
   d) Welche Masse hat das Gefäß, wenn es aus Glas (ρ = 2,5 g/cm^3) hergestellt wird?
   e) Der Schnaps wird ausgetrunken und in das Glas wird eine Eiskugel mit dem Radius r = 2,5 cm bis zur Berührung hineingelegt. Berechne den verbleibenden Zwischenraum unterhalb der Kugel.
   [Kontrolle: Berührungspunkt B($\sqrt{6}$/7); k: $x^2 + (y - 7,5)^2 = 2,5^2$]

   [**Lösungen:** b) V = 76,969 cm^3 c) 6,046 cm d) 273,371 g e) 33,51 cm^3]

3. Die drei Punkte A(3/3/-1), B(-4/-9/1) und C(6/-1/-3) liegen in einer Ebene ε_1. 20 •
   a) Stelle die Ebenengleichung für die Ebene ε_1 auf.
   b) Eine zweite Ebene ε_2 mit der Gleichung ε_2: 4x - y+ 8z = -80 ist zur Ebene ε_1 parallel und hat von ihr den Abstand d = 9. Berechne die Gleichung einer weiteren Parallelebene ε_3 mit demselben Abstand zur Ebene ε_1. *[Kontrolle: ε_3: 4x - y + 8z = 82]*
   c) Die Gerade g: X = (4,0,-12) + t·(-1,3,11) schneidet die Ebene ε_3 im Punkt S. Berechne die Koordinaten von S. *[Kontrolle: S(2/6/10)]*
   d) Die Punkte A, B, C und S bilden ein Tetraeder. Berechne den Flächeninhalt der Grundfläche und das Volumen des Tetraeders.
   e) Spiegle die Spitze S an der Ebene ε_1 und berechne die Koordinaten des gespiegelten Punktes S'.
   f) Zeige, dass S' in der Ebene ε_2 liegt.
   g) Die Gerade g soll auf die Ebene ε_1 projiziert werden. Gib die Gleichung der projizierten Gerade g_p an.

   [**Lösungen:** a) 4x - y + 8z = 1 d) A_G = 36 V = 108 e) S'(-6/8/-6) g) (3,3,-1) + s·(5,-4,-3)]

4. Der Abbau des in einem schmerz- und entzündungshemmenden Mittel enthaltenen Wirkstoffes Mefenaminsäure erfolgt im menschlichen Körper nach dem Gesetz $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$. Gib alle in diesem Beispiel berechneten Zahlen auf 5 Dezimalstellen genau an! 20 ●

a) Leite den Zusammenhang $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$ her und bestimme die Zerfallkonstante λ für den oben genannten Wirkstoff, wenn dieser mit einer biologischen Halbwertszeit $\tau = 4$ Stunden exponentiell abgebaut wird. Schreibe das zugehörige Abbaugesetz an.

b) Bei einem Patienten wird 1 Stunde 42 Minuten (= 1,7 h) nach Verabreichung der letzten Medikation eine Menge von 400 mg des Wirkstoffes im Körper festgestellt. Wie viele mg Wirksubstanz (N_0) muss sich daher unmittelbar nach der Medikamenteneinnahme im Körper befunden haben?

c) Berechne, nach wie viel Stunden weniger als 100 mg des Wirkstoffes nach Verabreichung einer Tablette von 500 mg nachzuweisen wäre.

INFO: Für eine heilende Wirkung muss eine möglichst gleichmäßig hohe Konzentration im Körper des Patienten vorhanden sein. Dafür ist das richtige Dosierintervall ausschlaggebend. Außerdem muss beachtet werden, dass erst ab 200 mg eine heilende Wirkung entfaltet wird, während bei mehr als 700 mg schädliche Nebenwirkungen auftreten können.

d) Ein Patient erhält um 06:00 Uhr morgens eine Anfangsdosis von 600 mg und dann in weiterer Folge alle 8 Stunden eine Dosis von 500 mg verabreicht. Berechne für den Zeitraum von 24 Stunden, wie viele mg des Wirkstoffes sich jeweils unmittelbar vor sowie unmittelbar nach jeder Medikamenteneinnahme im Körper des Patienten befinden, also unmittelbar vor 14:00 Uhr (= N(8)), unmittelbar nach 14:00 Uhr (= N(8) + Einnahmedosis), unmittelbar vor 22:00 Uhr, …

e) Gibt es Zeiträume, in denen eine überhöhte Dosis zu schädlichen Nebenwirkungen führen könnte? Hätte der Patient mit schädlichen Nebenwirkungen zu rechnen, wenn er um 06:00 Uhr Früh des nächsten Tages genauso wie am Vortag eine Dosis von 600 mg erhält? Begründe!

[**Lösungen:** b) 537,03193 mg c) 9,28754 h d) $\begin{bmatrix} 0\text{ mg} & 149{,}996\text{ mg} & 162{,}495\text{ mg} & 165{,}619\text{ mg} \\ 600\text{ mg} & 649{,}996\text{ mg} & 662{,}495\text{ mg} & 665{,}619\text{ mg} \end{bmatrix}$]

80 - 72 ●	71 - 64 ●	63 - 52 ●	51 - 40 ●	39 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201076 **BRG Klagenfurt-Viktring** **9073 Stift-Viktring-Straße 25**
8B Mag. Barbara Blasge

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Die erste Ableitung einer Polynomfunktion 3. Grades lautet $f'(x) = \frac{3}{8} \cdot (x^2 - 10x + 21)$. 26 •

   Der Graph der Funktion f enthält den Punkt P(5/2).

   a) Ermittle die Funktionsgleichung von f. *[Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^3 - 15x^2 + 63x - 49)$]*

   b) Diskutiere die Funktion und zeichne ihren Graphen für $0 \leq x \leq 8$ (Einheit: 5 mm).

   c) Beweise, dass die Nullstelle N_1, Hoch- und Wendepunkt Eckpunkte eines gleichschenkeligen Dreiecks sind.

   d) Berechne, wie viel Prozent des Inhalts der vom Graphen fund der x-Achse begrenzten Fläche auf dieses Dreieck entfallen.

   [**Lösungen:** b) $N_1(1/0)$ $N_2 = T(7/0)$ H(3/4) W(5/2) t_W: $y = -\frac{3}{2}x + \frac{19}{2}$ c) $N_1W = N_1H = \sqrt{20}$ d) 6 / 13,5 = 44,44%]

2. Ein Eignungstest enthält u.a. auch fünf Fragen zum aktuellen Tagesgeschehen. Zu jeder dieser Fragen sind drei Antworten zur Auswahl angegeben, von denen nur eine richtig ist. Jemand hat keine Ahnung von den gefragten Inhalten und kreuzt zufällig an. Es sei X die Anzahl der richtigen Antworten. 12 •

   a) Welche Werte kann X annehmen?

   b) Stelle die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X durch eine Tabelle sowie ein Stabdiagramm dar.

   c) Berechne den Erwartungswert von X und erkläre die Bedeutung des Erwartungswertes.

   d) Der Test gilt als bestanden, wenn mehr Fragen richtig als falsch beantwortet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, den Test zu bestehen?

   [**Lösungen:** a) 0, 1, …, 5 b) $\begin{bmatrix} k & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ P(X=k) & 0{,}132 & 0{,}329 & 0{,}329 & 0{,}165 & 0{,}041 & 0{,}004 \end{bmatrix}$ c) 1,67 d) 0,210]

3. Eine Firma möchte ein Gefäß von 4 Litern Inhalt herstellen. Berechne, ob seine Form ein (oben offenes) quadratisches Prisma oder ein (oben offener) Zylinder sein soll, damit der Materialverbrauch minimal ist. 18 •

   a) Berechne und interpretiere die beiden Ergebnisse.

   b) Weise nach, dass es sich um Minima handelt.

   [**Lösungen:** a) Prisma: a = 2 h = 1 $O_{min} = 12\ dm^2$ Zylinder: $r = h = \sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$ $O_{min} = 11{,}07\ dm^2$]

4. Der Innenraum eines Kessels entsteht durch Rotation des Graphen der Funktion f mit $f(x) = k \cdot x^2$ um die y-Achse zwischen y = 0 und y = 6. Wähle k so, dass der obere Rand des Kessels den Radius r = 4 hat (Angaben in dm). 8 •

   a) Fertige eine Skizze an und berechne k.

   b) Berechne das Volumen V des Kessels.

   c) Der Kessel soll mit einer Flüssigkeit vom Volumen $V = 12\pi\ dm^3$ gefüllt werden. Wie hoch steht die Flüssigkeit im Kessel?

   [**Lösungen:** a) $k = \frac{3}{8}$ b) $V = 48\pi\ dm^3$ c) h = 3 dm]

64 - 58 •	57 - 52 •	51 - 42 •	41 - 32 •	31 - 0 •
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201076 **BRG Klagenfurt-Viktring** **9073 Stift-Viktring-Straße 25**
8C Mag. Barbara Pfeiler

Hilfsmittel: Formelsammlung, CAS Rechner (Voyage 200)

1. Gegeben sind die Punkte A(3/3/-2), B(5/7/2), C(1/9/6), D(-1/5/2) und P_a(-4/2a/a) mit $a \in \mathbb{R}$.

   a) Ermittle die Gleichung der Ebene ε, welche die Punkte A, B und C enthält. Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt P_a in der Ebene ε liegt. 3 ●

   b) Es existiert mindestens ein Punkt F, sodass die Punkte A, B, C und F Eckpunkte eines Trapezes mit folgenden zwei Eigenschaften sind: 4 ●
   - AB || FC
   - Eine der beiden Parallelseiten ist doppelt so lang wie die andere.

   Zeichne eine Skizze und berechne die Koordinaten eines Punktes F. Argumentiere und begründe, dass es 4 Möglichkeiten für die Koordinaten von F gibt.

   c) Zeige, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, mit $\alpha \neq 90°$. 4 ●

   d) Das Viereck ABCD ist die Grundfläche von 2 geraden Pyramiden mit der Körperhöhe $h = \sqrt{65}$. Berechne die Koordinaten der beiden Spitzen S_1 und S_2 sowie das Volumen einer Pyramide. 6 ●

   e) Berechne den Winkel β, den die Seitenkante AS_1 mit der Grundfläche einschließt. 3 ●

   [**Lösungen:** a) ε: 2x - 6y + 5z = -22 P(-4/4/2) b) F_1(0/7/4) d) S_1(4/0/7) S_2(0/12/-3) $V = \frac{260}{3}$ e) 57,69°]

2. Unmittelbar neben einem geraden, horizontalen Straßestück AB befindet sich ein steil ansteigendes, abgeholztes, ebenes Gelände ABG, das bis zu einem Gipfel G eines Berges hinauf reicht. Geologen meinen, ein Hang dieser Bodenbeschaffenheit sei murengefährdet, wenn seine Neigung mehr als 41° beträgt. Zur Einschätzung der Gefahr wurden vermessen:
   - die Länge des Straßenstückes: AB = 800,0 m
   - der Höhenwinkel von A zu G: $\alpha = 35{,}3°$
   - der Horizontalwinkel zwischen AB und der Vertikalebene, in der AG liegt: $\gamma = 54{,}7°$
   - der Horizontalwinkel zwischen AB und der Vertikalebene, in der BG liegt: $\delta = 48{,}9°$

   Hinweis: Runde alle Ergebnisse - falls erforderlich - auf 2 Dezimalstellen.

   a) Erstelle eine übersichtliche Skizze und beschrifte diese vollständig. 2 ●

   b) Ermittle die relative Höhe des Berggipfels G von der Horizontalebene. 3 ●

   c) Berechne den Neigungswinkel ε des Hanges gegen die Horizontalebene und entscheide dann, ob ein Murenabgang zu befürchten ist. 3 ●

   d) Unter welchem Höhenwinkel erscheint der Berggipfel G von B aus? 2 ●

   e) Erkläre, bei welcher Art von Aufgabenstellung der Kosinussatz verwendet wird. Formuliere an Hand deiner Skizze von a) ein eigenes Beispiel zur Anwendung des Kosinussatzes und erstelle ein vollständiges Protokoll zur Berechnung deines Beispiels. 5 ●

   [**Lösungen:** b) 439,15 m c) 40,94° d) 33,17°]

3. Ein liegendes Weinfass hat die Form eines auf beiden Seiten abgeschnittenen Rotationsellipsoids. Der Boden hat einen Durchmesser von 4,8 dm, der größte Durchmesser in der Fassmitte beträgt 8 dm und die Höhe des Fasses beträgt 12,8 dm.
Hinweis: Runde alle Ergebnisse - falls erforderlich - auf 2 Dezimalstellen.

a) Wähle ein geeignetes Koordinatensystem, skizziere die Ellipse und zeige, dass $x^2 + 4y^2 = 64$ die Gleichung der gesuchten Ellipse ist. Berechne, wie viele hl Wein das volle Fass enthält. 7 ●

b) Aus diesem Wein wird Sekt gemacht. Ein Sektglas wird innen von der Parabel $x^2 = 2py$ begrenzt. Die innere Höhe des Glases beträgt 10 cm, der obere innere Durchmesser beträgt 6 cm. Zeige, dass $x^2 = 0{,}9y$ eine Gleichung der Parabel ist und berechne das Füllvolumen, wenn die Füllmarke genau 1 cm unter dem oberen Rand angebracht ist. 5 ●

c) Eine Flasche Sekt enthält 0,7 Liter. Ein Kellner bleibt beim Einschenken immer 2 mm unter der Füllmarke. Wie viele Gläser muss er einschenken, um eine Flasche einzusparen? 3 ●

d) Wähle die Ellipse aus a) und schätze im Intervall $[0;4]$ das Volumen durch Berechnung der Ober- und der Untersumme ab, indem du das Intervall in 8 Teile teilst. 5 ●

[**Lösungen:** a) $V = 506{,}14\ dm^3 \approx 5{,}06$ hl b) $114{,}51\ cm^3$ c) ≈ 140 d) O = 187,34 U = 181,02]

4. Rasche Rettung ist bei Verschüttung durch Lawinen lebensnotwendig. Die Chance C zu überleben hängt von der Dauer t der Verschüttung ab und sinkt nach der Differentialgleichung $\frac{dC}{dt} = -\lambda \cdot C$. Die Überlebenschance bei Ganzverschütteten beträgt nach 12 Minuten 77% und nach 30 Minuten nur noch 58%.
Hinweis: Runde alle Ergebnisse - falls erforderlich - auf 4 Dezimalstellen.

a) Stelle einen Zusammenhang zwischen Dauer t der Verschüttung (in Minuten) und der Überlebenschance C (in %) als Funktion dar, indem du die Differentialgleichung löst. 4 ●

b) Berechne die Überlebenschance für einen Ganzverschütteten, der nach 45 Minuten gerettet wird, und berechne die Zeit t, wenn die Überlebenschance 90% betragen soll. 2 ●

c) Interpretiere und berechne für dieses Beispiel den Begriff der Halbwertszeit τ und beweise (ohne Voyage) den Zusammenhang $\tau = \frac{\ln 2}{\lambda}$. 6 ●

85% der Ganzverschütteten, die mit einem Lawinenairbag ausgerüstet sind, können ihn zu ihrer Rettung rechtzeitig auslösen. Eine Gruppe von 6 Tourengehern gerät in eine Lawine und alle werden zur Gänze verschüttet. Alle 6 haben jedoch einen Lawinenairbag.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 4 von ihnen den Airbag rechtzeitig auslösen können? 3 ●

e) Erfahrungsgemäß können sich 6% der Ganzverschütteten selbst befreien. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich mindestens einer der Gruppe selbst befreien kann? 2 ●

f) Durch eine statistische Auswertung der Lawinenunfälle der letzten Jahre ist bekannt, dass 44% der Verschütteten durch ihre Gruppenkameraden befreit werden. Wenn es nun einem der 6 Tourengeher gelungen ist, sich zu befreien, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen der anderen zu befreien? 2 ●

g) Mit welcher Wahrscheinlichkeit befreit er alle? 1 ●

[**Lösungen:** a) $C(t) = C(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$ b) 0,4589 2,095 min c) $\tau = 44{,}15$ min d) 0,9527 e) 0,3101 f) 0,9449 g) 0,0165]

75 - 67 ●	66 - 58 ●	57 - 48 ●	47 - 38 ●	37 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201076 **BRG Klagenfurt-Viktring** **9073 Stift-Viktring-Straße 25**
8D Mag. Josef Schumann

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4-x)\cdot e^{\frac{x}{4}}$. 20 ●

   a) Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte. Zeichne weiters den Graphen von f im Intervall [-6;5].

   b) Bestimme den Inhalt jenes Flachenstücks, das vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall [-2;4] eingeschlossen wird.

   c) Dem Flächenstück, das der Funktionsgraph mit der x-Achse im 1. Quadranten begrenzt, ist ein Rechteck mit größtmöglichem Flacheninhalt so einzuschreiben, dass gilt: A = O, B liegt auf der x-Achse und C auf f. Bestimme die Koordinaten von C.

   [**Lösungen:** a) N(4/0) H(0/4) W(-4/2,94) b) A = 19,21 c) C(2,47/2,83)]

2. Mit Hilfe einer Standlinie AB in 5 m Entfernung parallel zum Ufer eines Sees soll die Entfernung zweier Bojen P und Q im See bestimmt werden. Dabei haben A und B die kartesischen Koordinaten A(12/5) und B(120/50) [Maße in m]. Man misst ferner die Winkel $\alpha_1 = \angle PAB = 71°$, $\alpha_2 = \angle QAB = 35°$, $\beta_1 = \angle ABP = 45°$, $\beta_2 = \angle ABQ = 62°$. 20 ●

   a) Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1:1000 an.

   b) Berechne die gegenseitige Lage der Bojen PQ.

   c) Wie weit ist die Boje P vom Ufer entfernt?

   [**Lösungen:** b) PQ = 61,67 m c) 82,02 m]

3. Eine Blumenhandlung weiß aus Erfahrung, dass beim Transport ungefähr 10% der transportierten Rosen beschädigt werden. 20 ●

   a) Die Blumenhandlung bietet Rosen im Bund an. Ein Bund enthält 50 zufällig ausgewählte Rosen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass davon keine / genau 5 / mindestens 2 Rosen beschädigt sind.

   b) Wie viel Stück Rosen muss ein Bund mindestens umfassen, damit der Kunde mit mindestens 96%iger Wahrscheinlichkeit damit rechnen muss, mindestens eine beschädigte Rose zu bekommen?

   Die Anzahl der beschädigten / unbeschädigten Rosen sei normalverteilt. Berechne jeweils den Erwartungswert μ und die Streuung σ.

   c) In welchem Bereich (symmetrisch zu μ) liegt mit 96%-iger Wahrscheinlichkeit die Anzahl der unbeschädigten Rosen, wenn 300 Stück bestellt werden?

   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Lieferung mit 400 Rosen höchstens 50 beschädigte enthält?

   [**Lösungen:** a) 0,005 0,185 0,966 b) 31 c) [259,3;280,7] d) 0,952]

4. Das Parallelogramm ABCD [A(3/1/4), B(6/4/10), C(5/3/10), D] ist Grundfläche einer geraden Pyramide mit der Höhe $h = 10\cdot\sqrt{2}$. 20 ●

   a) Berechne die Spitze(n) dieser Pyramide.

   b) Berechne das Volumen dieser Pyramide.

   c) Welchen Winkel schließt die Seitenkante DS mit der Grundfläche ein?

   [**Lösungen:** a) D(2/0/4) S_1(-6/12/7) S_2(14/-8/7) b) V = 39,97 c) 73,74°]

80 - 73 ●	72 - 65 ●	64 - 49 ●	48 - 40 ●	39 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

 ORG St. Ursula Klagenfurt **9020 Ursulinengasse 5**
8A Mag. Claudia Wieser

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Ein Grundstück hat die Form eines ebenen Vierecks ABCD: 16 ●
a = AB = 123,60 m, b = BC = 90,70 m, c = CD = 55,20 m, d = DA = 86,20 m; $\angle$ADC = 90°, $\angle$BAD = 61,28°. Durch das Grundstück soll auf einer Trasse mit der konstanten Breite von 16 Metern eine geradlinig verlaufende Straße gebaut werden. Die Mittellinie in der Trasse verläuft durch den Eckpunkt D und trifft unter einem rechten Winkel auf die Seite a auf.
   a) Wie viele m^2 des Grundstückes müssen abgelöst werden?
   b) Das Grundstück wird wegen seines ungünstigen Grenzverlaufs vom Verkäufer um 15% unter dem in der Gegend üblichen Preis von 77 Euro pro m^2 angeboten. Überprüfe, ob der Kaufpreis von 75 750 Euro tatsächlich obigem Angebot entspricht.

   [**Lösungen:** a) A = 1 157,5 m^2 b) 75 758,38 €]

2. Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades geht durch den Punkt P(0/-6,25), hat bei x = -1 eine Nullstelle, bei x = 3 einen Wendepunkt, die Steigung der zugehörigen Wendetangente ist 3. 16 ●
   a) Zeige, dass es sich um die Funktion $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (-x^3 + 9x^2 - 15x - 25)$ handelt.
   b) Untersuche die Funktionen f und g mit $g(x) = -3 \cdot f(x)$ auf Nullstellen, Extremwerte und Wendepunkte und zeichne deren Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem.
   c) Interpretiere mit Hilfe von b), welcher Zusammenhang zwischen Nullstellen, Hoch-, Tief- und Wendepunkten einer Polynomfunktion f und der Funktion $a \cdot f$ besteht, wobei a eine reelle Zahl ungleich Null ist.
   d) Berechne den Inhalt jener Fläche, die von f und g begrenzt wird.

   [**Lösungen:** b) f: N_1(-1/0) N_2 = H(5/0) T(1/-8) W(3/-4) d) A = 108]

3. Einem Großhändler wird der Kauf einer größeren Menge von Kugelschreibern zu günstigen Konditionen angeboten. Die Auslieferung der Kugelschreiber erfolgt in Kartons zu je 500 Stück. 14 ●
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Stichprobe von fünf Kugelschreibern genau zwei defekt sind, wenn der Anteil der defekten Kugelschreiber in dem ausgewählten Karton 2% beträgt?
   b) Unter den Kartons, in denen 25% der Kugelschreiber defekt sind, wird einer zufällig ausgewählt. Diesem Karton wird zur Kontrolle eine Stichprobe von 20 Kugelschreibern entnommen. Gib die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass aus dieser Stichprobe keine / genau drei / maximal drei Kugelschreiber defekt sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei dieser Stichprobe mehr als fünf defekte Kugelschreiber zu erhalten?
   c) Ein anderer Hersteller bietet gleichartige Kugelschreiber an. Er garantiert eine maximale Ausschussquote von 10%. Der Händler prüft wieder 20 Kugelschreiber aus der Gesamtsendung. Könnte man dem Händler glauben, wenn mehr als drei der geprüften Kugelschreiber defekt sind?

   [**Lösungen:** a) 0,0038 b) 0,0032 0,1339 0,2252 0,3828 c) $P(X \geq 3) = 0,133$]

4. Ein zylindrisches Gefäß mit 5 Liter Inhalt hat oben ein kreisförmiges Loch in der Mitte des Deckkreises, dessen Durchmesser halb so groß ist, wie der Durchmesser des Grundkreises. Bei welchen Abmessungen ist am wenigsten Material erforderlich und wie viel cm^2 Blech benötigt man? Um wie viel Prozent würde sich der Materialverbrauch erhöhen, wenn der Deckkreis geschlossen wäre? 12 ●

   [**Lösungen:** r = 9,7 cm h = 17 cm O_{min} = 1 548,2 cm^2 4,5%]

58 - 53 ●	52 - 45 ●	44 - 37 ●	36 - 29 ●	28 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

201106 **ORG St. Ursula Klagenfurt** **9020 Ursulinengasse 5**
8B Mag. Susanne Grübler

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1A Für den Kauf einer Maschine hat die Kaufinteressentin mit dem Verkäufer folgende Vereinbarung getroffen: Die Maschine wird bei ihr aufgestellt, dann werden 25 Stück probeweise produziert. Im Fall dass

1. alle Stücke in Ordnung sind, beträgt der Kaufpreis 200000,- €.
2. genau 1 Stück Ausschuss ist, wird der Kaufpreis um 5% gesenkt.
3. genau 2 Stück Ausschuss sind, wird der Kaufpreis um 10% gesenkt.
4. genau 3 Stück Ausschuss sind, wird der Kaufpreis um 20% gesenkt.
5. genau 4 Stück Ausschuss sind, wird der Kaufpreis um 30% gesenkt.
6. mehr als 4 Stück Ausschuss sind, wird die Maschine nicht gekauft.

Der Verkäufer weiß aus Erfahrung, dass 6% aller produzierten Stücke fehlerhaft sind.

a) Gib den Streubereich ($\mu \pm \sigma$) für die Anzahl der fehlerhaften Stück im Probebetrieb an. 1 ●

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 2 Stück fehlerhaft sind? 1 ●

c) Wie groß ist die Chance, dass es zu keinem Verkauf kommt? 3 ●

d) Welchen Gewinn darf der Verkäufer erwarten, wenn sein Einstandspreis 160000,- € beträgt und wenn er in jedem Fall die Kosten von 5000,- € für Transport, Probebetrieb usw. tragen muss? 3 ●

1B Die Lebensdauer der Autoreifen der Firma Pirelumi ist erfahrungsgemäß normalverteilt mit einer mittleren Lebensdauer von μ = 45000 km und der Standardabweichung σ = 2500 km.

a) Bei wie viel % der Reifen kann man höchstens 48000 km zurücklegen? 2 ●

b) Bei wie viel % der Reifen kann man mehr als 50000 km zurücklegen? 2 ●

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lebensdauer der Reifen um höchstens 4000 km von der mittleren Lebensdauer abweicht? 2 ●

d) Die Lebensdauer der Reifen soll mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit im Toleranzbereich $[\mu - \varepsilon \leq X \leq \mu + \varepsilon]$ liegen. Wie groß muss ε sein? Interpretiere das Ergebnis! 2 ●

[**Lösungen:** [A] a) $1{,}5 \pm 1{,}19$ b) 0,4473 c) 0,015 d) 15611 € [B] a) 0,8849 b) 0,02275 c) 0,8904 d) ε = 4900]

2A Der Holzbestand eines Waldes beträgt $N_0 = 9500\ m^3$. Der jährliche Zuwachs kann die ständige Schlägerung nicht mehr ausgleichen, sodass der Holzbestand pro Jahr um p = 2,7% abnimmt.

a) Bestimme die zugehörige Exponentialfunktion in der Form $N(t) = N_0 \cdot a^t$ und zeichne ihren Graphen für die ersten 40 Jahre. Fertige dazu eine Wertetabelle mit einer Schrittweite von 5 Jahren an. 4 ●

b) Sobald der Holzbestand einen Tiefstand von $5000\ m^3$ erreicht hat, möchte der Besitzer die Schlägerung für einige Jahre einstellen. Nach wie vielen Jahren ist es soweit? Berechne den genauen Wert und vergleiche mit der Zeichnung. 2 ●

2B Das Kohlenstoffisotop C14 hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren.

a) Bestimme den Zerfallskonstante λ auf 6 Dezimalstellen genau. 1 ●

b) Zeichne die zugehörige Exponentialfunktion (N_0 = 10 mg) für die ersten 10000 Jahre. 4 ●

c) Ein Tierskelett enthält nur noch 10% des ursprünglichen C14-Anteils. Wie alt ist das Skelett? 1 ●

[**Lösungen:** [A] a) $N(t) = 9500 \cdot 0{,}973^t$ b) 23,45 Jahre [B] a) 0,000121 c) $\approx$ 20000 Jahre]

3. Der Kreis k geht durch die Punkte A(2/3) und B(9/4). Er hat seinen Mittelpunkt auf der x-Achse. Die Hyperbel hyp: $2x^2 - 9y^2 = 18$ schneidet den Kreis.

   a) Berechne die Gleichung des Kreises. 4 ●

   b) Berechne die Schnittpunkte von Kreis und Hyperbel und fertige eine genaue Skizze an. 4 ●

   c) Durch die Hyperbel wird die Kreisfläche in zwei Teile zerlegt, die bei Rotation um die x-Achse zwei Drehkörper erzeugen. In welchem Verhältnis stehen die Volumina dieser beiden Drehkörper zueinander? 4 ●

[**Lösungen:** a) $(x - 6)^2 + y^2 = 25$ b) $S_{12}(9/\pm4)$ c) $V_1 = 40\pi + \frac{52\pi}{3} = \frac{172\pi}{3}$ $V_2 = \frac{500\pi}{3} - \frac{172\pi}{3} = \frac{328\pi}{3}$ $V_2 : V_1 = 82 : 43$]

4. Durch einen Berg soll ein horizontal verlaufender Tunnel gegraben werden. Um seine Länge zu bestimmen, werden von einem benachbarten Berggipfel C aus, der 117 m über dem Tunnelniveau liegt, der Tunnelanfang A und das Tunnelende B ins Visier genommen. Von C aus erscheint A unter dem Tiefenwinkel $\alpha = 11{,}3°$ und B unter dem Tiefenwinkel $\beta = 9{,}7°$. Zwischen den Tiefenwinkelmessungen musste das Zielfernrohr um einen Horizontalwinkel von $\varphi = 93{,}5°$ geschwenkt werden.

   a) Wie lang ist der Tunnel? Skizze! 4 ●

   b) Wie groß ist der Winkel, den die Sehstrahlen CA und CB miteinander einschließen? 4 ●

[**Lösungen:** a) 927,5 m b) 91,55°]

5. Von einer Polynomfunktion 3. Grades kennt man die 1. Ableitung $f'(x) = 6x^2 - 24x + 18$. Außerdem geht ihr Graph durch den Punkt P(2/4).

   a) Zeige, dass es sich dabei um die Funktion $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 18x$ handelt. 2 ●

   b) Untersuche die Funktion auf Nullstellen, Extrem- und Wendestellen und zeichne ihren Graphen. 4 ●

   c) Zeige, dass der Graph dieser Funktion symmetrisch bezüglich seines Wendepunktes ist. 2 ●
   [Hinweis: Zeige $f(x_W + x) - f(x_W) = f(x_W) - f(x_W - x)$]

   d) Zeige, dass die Gerade, die durch den Ursprung und den Wendepunkt verläuft, mit dem Graphen zwei gleich große Flächenstücke begrenzt. 4 ●

[**Lösungen:** b) $N_1(0/0)$ $N_2 = T(3/0)$ H(1/8) W(2/4) d) g: y = 2x $A_1 = A_2 = 8$]

60 - 54 ●	53 - 46 ●	45 - 38 ●	37 - 30 ●	29 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

205046 **ORG St. Ursula Expositur Gurk** **9342 Domplatz 11**
8A Mag. Werner Probst

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Nach dem Gravitationsgesetz von Newton ist die im Abstand s vom Erdmittelpunkt auf die Masse m wirkende Schwerkraft F gegeben durch $F(s) = G \cdot \frac{M \cdot m}{s^2}$ (M … Erdmasse, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $kg^{-1}m^3s^{-2}$ … Gravitationskonstante). 8 ●

   Um eine Masse m von der Entfernung a in die Entfernung b vom Erdmittelpunkt zu bringen, ist somit folgende Arbeit zu leisten: $W = \int_a^b F(s)\,ds$.

   Der Erdradius beträgt R = 6370 km. Für die Erdoberfläche gilt s = R und deshalb kann man die Gewichtskraft der Gravitationskraft gleichsetzen: $G \cdot \frac{M \cdot m}{R^2} = m \cdot g$, was verwendet werden kann, um die Berechnung auch ohne Kenntnis der Erdmasse durchführen zu können (Erdbeschleunigung $g = 10\ ms^{-2}$).

   a) Welche Arbeit ist erforderlich, um das beladene Space-Shuttle (m = 111 t) zur Raumstation ISS zu bringen, die sich in einer Höhe von 400 km über der Erdoberfläche befindet?

   b) Ermittle mit Hilfe der Formel für die kinetische Energie $W_{kin} = \frac{m \cdot v^2}{2}$ die Geschwindigkeit v, die das Space-Shuttle am Anfang mindestens haben muss, um diese Höhe zu erreichen.

   c) Argumentiere, warum diese Berechnungen nur Näherungen sein können und welche Faktoren noch zu berücksichtigen wären.

   [**Lösungen:** a) $4{,}17 \cdot 10^{11}$ J b) 2,7 km/s]

2. Bei Entladung eines Kondensators C über den Widerstand R mit der Anfangsspannung U_0 ist die Spannung in jedem Zeitpunkt t durch $U(t) = U_0 \cdot e^{-t/RC}$ gegeben. 5 ●

   a) Berechne C und U_0 für R = 10 kΩ, U(1) = 44,4 V, U(2) = 6 V.

   b) In welcher Zeit ist die Spannung auf 1 V gesunken?

   [**Lösungen:** a) $C = 5 \cdot 10^{-5}$ F U_0 = 328,56 V b) t = 2,89 s]

3. $f(x) = \frac{32x}{(x^2+3)^2}$ 10 ●

   a) Diskutiere die Funktion und zeichne sie im Intervall [-3;3].

   b) Begründe bei den einzelnen Schritten der Berechnungen, warum das Lösen der jeweiligen Gleichung zur gewünschten Information über die Funktion führt.

   [**Lösungen:** a) N(0/0) T(-1/-2) H(1/2) $W_1(\sqrt{3} / \frac{8 \cdot \sqrt{3}}{9})$ $W_2(-\sqrt{3} / -\frac{8 \cdot \sqrt{3}}{9})$ a: y = 0]

4. Von einem Punkt P aus erblickt man eine Strecke AB unter dem Winkel ∠APB = 99,18°. Außerdem sind die Entfernungen PA = 375 m und PB = 482 m bekannt. Auf der Strecke AB liegen 2 Punkte C und D, für die folgendes gilt: ∠APC = 26,06°, ∠DPB = 38,72°. Berechne die Entfernung CD. 6 ●

   [**Lösungen:** AB = 656,26 m CD = 168,35 m]

5. Gegeben ist die Hyperbel hyp: $9x^2 - 16y^2 = 144$. 6 •

a) Bestimme die Gleichung der Tangente, die man im Punkt $P(x_P/4)$, $x_P > 0$, an die Hyperbel legen kann.

b) Vom Brennpunkt F_1 wird auf diese Tangente die Normale errichtet, die die Gerade PF_2 im Punkt Q schneidet. Zeige: $F_2Q = 2a$.

[**Lösungen:** a) $P(\frac{20}{3}/4)$ t_P: $15x - 16y = 36$ b) $F_{12}(\pm 5/0)$ $Q(\frac{25}{13}/-\frac{96}{13})$ $F_2Q = 8$]

35 - 32 •	31 - 28 •	27 - 21 •	20 - 17 •	16 - 0 •
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1A Die Funktion $f(x) = ax^2 + bx + 5$ verläuft durch den Punkt P(5/y) und hat dort die Tangente mit der Gleichung $y = 4x$.

a) Ermittle die Funktionsgleichung. 2 ●

b) Der Graph der Funktion $y = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 5$, die x-Achse, die y-Achse und die Ordinate im Punkt Q(7/0) begrenzen im ersten Quadranten die Fläche eines zerbrochenen Glasscheibenstücks, aus dem die flächengrößte rechteckige Scheibe geschnitten werden soll. Zeichne eine Skizze und berechne Länge, Breite und die maximale Fläche der rechteckigen Glasscheibe. 5 ●

c) Berechne den Abfall in Prozenten. 3 ●

1B Ermittle das unbestimmte Integral $\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx =$ 3 ●

[**Lösungen:** [A] a) $y = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 5$ b) $A_{max} = 4 \times 12{,}8 = 51{,}2$ c) 52,09% [B] $\frac{e^{2x}}{5} \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x) + c$]

2A Von einer Ellipse in erster Hauptlage kennt man zwei Punkte P(4/1) und Q(2/$\sqrt{7}$). 3 ●
Ermittle die Ellipsengleichung sowie die Koordinaten aller Scheitel und die der Brennpunkte.

2B Ellipse: $2x^2 + 4y^2 = 36$, Parabel: $x^2 = 16y$ 3 ●
Ermittle die Längen der Achsen der Ellipse, den Scheitel der Parabel, zeichne eine Skizze und berechne die Koordinaten der Schnittpunkte sowie die Größe des Schnittwinkels der beiden Kegelschnitte.

[**Lösungen:** [A] $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ [B] $a = 3 \cdot \sqrt{2}$ $b = 3$ S(0/0) S_{12}(±4/1) 90°]

3. Von einer quadratischen Pyramide kennt man den Eckpunkt A(-1/-2/5) der Basis, die Spitze S(2/1/8) und die Trägergerade der Höhe h: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

a) Ermittle die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte. 8 ●

b) Berechne das Volumen der Pyramide. 2 ●

c) Unter welchem Winkel ist eine Seitenkante zur Grundfläche geneigt? 1 ●

[**Lösungen:** a) ε: $2x - y + 2z = 10$ B(3/2/3) C(1/6/7) D(-3/2/9) b) V = 36 c) 32,26°]

4. Der Lagerplatz einer steirischen Firma hat die Form eines allgemeinen Vierecks ABCD, wobei $a = 52$ m, $d = 61$ m, $\alpha = 121{,}4°$, $\beta = 95{,}6°$ und $\delta = 42{,}8°$ sind.

a) Zeichne die Skizze in einem geeigneten Maßstab. Die Firmenleitung hat vor, diesen Platz asphaltieren zu lassen. Wie hoch werden die Kosten sein, wenn man für 1 m^2 21,50 € annimmt? 6 ●

b) Weiters führt vom Eckpunkt A eine geradlinige Straße, die den Platz in zwei flächengleiche Teile teilt. Berechne die Länge der Straße innerhalb des Platzes. 3 ●

c) Argumentiere, unter welchen Voraussetzungen in der Trigonometrie der Sinussatz bzw. der Kosinussatz zu Berechnungen herangezogen werden können. 2 ●

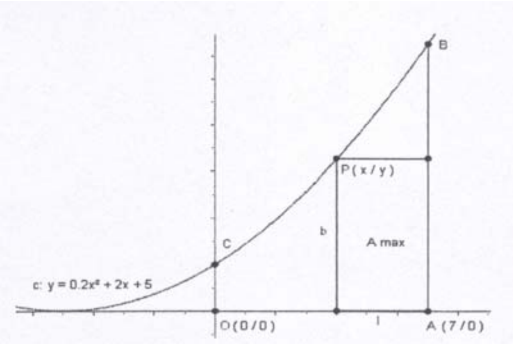
[**Lösungen:** a) $A = 2580{,}23\ m^2$ K = 55474,95 € b) 45 m]

44 - 39 ●	38,5 - 33,5 ●	33 - 27,5 ●	27 - 22 ●	21,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

202016 **BG/BRG Villach Perau** **9500 Peraustraße 10**
8B Mag. Richard Kristler
8C Mag. Arno Dengg

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Differential- und Integralrechnung



a) Aus dem zerbrochenen Glasscheibenstück OABC soll die flächengrößte rechteckige Scheibe geschnitten werden. Die Linie CB wird durch die Funktion $y = \frac{1}{5}x^2 + 2x + 5$ beschrieben. Berechne Länge und Breite und gib A_{max} an. 5 •

b) $\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx =$ 3 •

[**Lösungen:** a) $A_{max} = 4 \times 12{,}8 = 51{,}2$ b) $\frac{e^{2x}}{5} \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x) + c$]

2. Kegelschnittslinien

a) Von einer Ellipse in erster Hauptlage kennt man zwei Punkte P(4/1) und Q(2/$\sqrt{7}$). Gib die Ellipsengleichung an. 2 •

b) Ellipse: $2x^2 + 4y^2 = 36$, Parabel: $x^2 = 16y$ 6 •
Berechne Schnittpunkte und Schnittwinkel und fertige eine Skizze an.

[**Lösungen:** a) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $S_{12}(\pm 4/1)$ 90°]

3. Vektorrechnung

a) Bestimme im Dreieck ABC [A(2/2), B(-2/-6), C(5/-7)] die Gleichung des Umkreises und fertige eine Zeichnung an (Einheit 1 cm). 4 •

b) Von einer dreiseitigen Pyramide kennt man die Eckpunkte A(5/1/1), B(-1/3/9) und C(-3/-1/5). Der Fußpunkt der Höhe ist F(1/0/z). Die Spitze S liegt in der Ebene ε: 3x + 2y - z = -18. Berechne die Koordinaten von S und das Volumen der Pyramide. 4 •

[**Lösungen:** a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ b) ε_{ABC}: 6x - 10y + 7z = 27 F(1/0/3) S(13/-20/17) $V = \frac{740}{3}$]

4. Trigonometrie

Von einem viereckigen Grundstück ABCD kennt man AB = a = 52 m, BC = b = 62 m, AD = d = 48 m, $\angle DAB = 98°$ und $\angle ABC = 134°$. 8 ●

a) Berechne die Länge des Zauns für dieses Grundstück.

b) Teile das Grundstück von A aus durch eine Gerade in zwei flächengleiche Parzellen. Wie weit ist der Teilungspunkt E von C entfernt?

c) Fertige eine Zeichnung im Maßstab 1:500 an.

d) Interpretiere Rechnung und Zeichnung und begründe schließlich, warum der Teilungspunkt E auf der Strecke CD liegen muss.

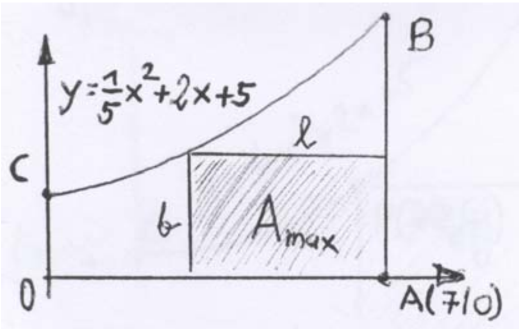
[**Lösungen:** a) U = 263,79 m b) CE = 26,4 m]

32 - 28,5 ●	28 - 24,5 ●	24 - 20,5 ●	20 - 16 ●	15,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

202016 **BG/BRG Villach Perau** **9500 Peraustraße 10**
8D Mag. Horst Windschnurer

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Differential- und Integralrechnung



a) Aus dem zerbrochenen Glasscheibenstück OABC soll die flächengrößte rechteckige Scheibe geschnitten werden. Berechne l und b und gib A_{max} an. 4 •

b) $\int e^{2x} \cdot \sin x \, dx =$ 2 •

[**Lösungen:** a) $A_{max} = 4 \times 12{,}8 = 51{,}2$ b) $\frac{e^{2x}}{5} \cdot (2 \cdot \sin x - \cos x) + c$]

2. Kegelschnittslinien

a) Von einer Ellipse in erster Hauptlage kennt man zwei Punkte P(4/1) und Q(2/$\sqrt{7}$). Gib die Ellipsengleichung an. 2 •

b) Die Bahnspuren zweier Flugobjekte seien gegeben durch ell: $2x^2 + 4y^2 = 36$, par: $x^2 = 16y$. Berechne Schnittpunkte und Schnittwinkel und fertige eine Skizze an. 3 •

[**Lösungen:** a) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ b) $S_{12}(\pm 4/1)$ 90°]

3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

a) 1 Prozent aller Glühbirnen einer großen Produktionsreihe ist defekt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zehnerpackung maximal zwei Birnen defekt sind? Interpretation bzgl. 170000 verkauften Packungen. 2 •

b) In einer Stadt sind 80% aller Taxis blau und 20% rot. Ein Zeuge sagt aus, dass ein an einem nächtlichen Unfall beteiligtes Taxi blau gewesen sei. Ein angeordneter Test des Richters ergibt, dass der Zeuge bei Dunkelheit in 90% die Taxifarbe richtig erkennt. Wie groß ist p, dass das Unfalltaxi wirklich blau war? 2 •

c) In einer Urne liegen Buchstabenkarten: ein A, zwei B, drei O und vier T. Man zieht einzeln vier Karten und schreibt die Buchstaben nacheinander auf. Man gewinnt, wenn sich das Wort BOOT ergibt. Sollte man mit oder ohne Zurücklegen spielen? Interpretation des gegenüber „dummen" Spiels zu erwartenden Vorteils bei 750 Ziehungen. 2 •

[**Lösungen:** a) 0,99986 $E_{170\,000} = 169976$ b) 0,9729 c) o.Z.: 0,009 m.Z.: 0,007 Vorteil: 1,74 Gewinne / 750 Spiele]

4. Vektorrechnung

Gegeben ist das Dreieck ABC [A(1/2), B(7/4), C(5/8)]. Berechne

a) h_c mittels HNf; 1 ●

b) Umkreismittelpunkt und Umkreisgleichung; 2 ●

c) den Flächeninhalt des Dreiecks. 1 ●

d) Das Dreieck ist Basis einer Pyramide mit der Höhe h = 8, wobei die Spitze genau über dem Höhenschnittpunkt H des Dreiecks liegt. Gib die Koordinaten der Spitze S an. 2 ●

[**Lösungen:** a) $\frac{7 \cdot \sqrt{10}}{5}$ b) $(x - \frac{24}{7})^2 + (y - \frac{33}{7})^2 = \frac{650}{49}$ c) A = 14 d) S($\frac{43}{7}$ / $\frac{32}{7}$ /8)]

23 - 20 ●	19,5 - 17,5 ●	17 - 14,5 ●	14 - 11,5 ●	11 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

202026 **BG/BRG Villach St. Martin** **9500 St.-Martiner-Straße 7**
8A Mag. Günter Pischelsberger
8B Mag. Waltraud Hohenwarter
8C Mag. Beate Kröpfl

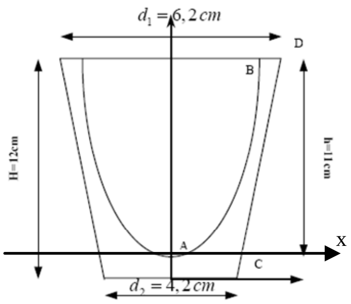
Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

---

1. Orangensaft im Glas

a) Saftpackungen haben im Allgemeinen die Form eines quadratischen Quaders. 7 ●
Aus Umweltschutzgründen sollte man möglichst sparsam mit Verpackungsmaterial umgehen. Berechne die Maße jenes quadratischen Quaders mit 1 Liter Fassungsvermögen, der minimalen Materialverbrauch hat. Überlege kritisch, ob das Ergebnis auch praxistauglich ist und in dieser Form tatsächlich verwendet wird. Begründe deine Überlegungen.

b) Ein Saftglas hat außen die Form eines 12 cm hohen Kegelstumpfes mit dem oberen äußeren Begrenzungsdurchmesser $d_1 = 6{,}2$ cm und dem unteren äußeren Begrenzungsdurchmesser $d_2 = 4{,}2$ cm. Die innere Begrenzung hat die Form eines Paraboloids: Der Querschnitt entsteht durch Rotation der Parabel $y = ax^2$. Die innere Höhe beträgt 11 cm, der innere obere Durchmesser 6 cm. Bestimme die Funktionsgleichungen von Parabel und Geraden. 3 ●



c) Wie viel Saft wird in das Glas gefüllt, wenn die Füllmarke 8 mm vom oberen Rand entfernt ist? 2 ●

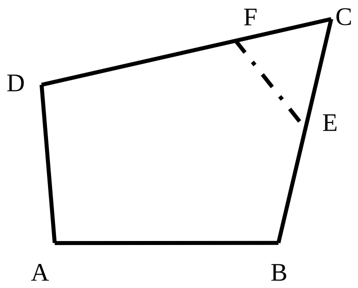
d) Wie hoch steht die Flüssigkeit im Glas, wenn aus einer 1-Liter-Packung die Flüssigkeit auf 8 Gläser gleichmäßig verteilt werden soll? 2 ●

e) Berechne die Masse des leeren Saftglases, wenn die Dichte des verwendeten Glases $\rho = 2{,}5$ g/cm^3 beträgt. 4 ●

[**Lösungen:** a) $a = h = 1$ $O_{min} = 6$ b) par: $y = \frac{11}{9}x^2$ g: $y = 12x - 26{,}2$ c) $V = 133{,}7$ cm^3 d) $h_{innen} = 9{,}86$ cm e) 25,6 dag]

2. Grundstück im sumpfigen Gelände

Ein Grundstück hat die Form eines allgemeinen Vierecks ABCD. Der Eckpunkt C liegt im sumpfigen Gelände und ist daher unzugänglich. Man misst: AB = 54 m, AD = 49 m, $\angle$CBA = 94,3°, $\angle$BAC = 48° und $\angle$BAD = 96,9°.



a) Bestimme die Abstände von C zu A, B und D. 7 ●

b) Berechne die Fläche des Grundstückes. 2 ●

c) Um zu verhindern, dass jemand unbeabsichtigt ins Sumpfgebiet gelangt, wird um den trockenen Teil des Grundstücks ein Zaun errichtet. Zu diesem Zweck wird ein Punkt E auf der Seite BC mit BE = 35 m und ein Punkt F auf CD mit DF = 40 m markiert. Wie viele Laufmeter Zaun hat die Umzäunung des Fünfecks ABEFC? 6 ●

d) Das gesamte Grundstück (ABCD) soll verkauft werden. Folgende Angebote liegen vor: 6 ●
   A: 100 000 € Anzahlung, 180 000 € nach 5 Jahren.
   B: 80 000 € Anzahlung sofort, ab dem nächsten Jahr 10-mal jährlich 20 000 € gleich zu Beginn jeden Jahres.
   Mach eine Zeitleiste und entscheide durch Rechnung, welches Angebot unter Annahme von 4% Nettoverzinsung besser für den Verkäufer ist.

[**Lösungen:** a) CA = 88,06 m CB = 65,62 m CD = 66,95 m b) A = 3 392,54 m^2 c) 211,63 m d) B_A = 247 946,88 €]

3. Gegeben ist das Dreieck ABC [A(0/0), B(2/0), C($\frac{2}{3}$/$\frac{16}{3}$)]

a) Berechne den Umkreismittelpunkt des Dreiecks und stelle die Gleichung des Umkreises auf. 7 ●

b) Berechne, wie viel Prozent der Fläche des Umkreises die Dreiecksfläche ausmacht. 4 ●

Eine Polynomfunktion 3. Grades hat den Punkt B als Wendepunkt und die Trägergerade der Seite BC als Wendetangente; außerdem geht der Graph der Funktion durch den Punkt A.

c) Zeige rechnerisch die Übereinstimmung mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$. 5 ●

d) Berechne die Nullstellen und die Extremwerte der Funktion. 5 ●
   Zeichne den Graphen der Funktion im Intervall [-0,5;4,5] mit dem Dreieck ABC in ein gemeinsames Koordinatensystem.

e) Zeige rechnerisch, dass auch die Trägergerade der Seite AC eine Tangente an die Kurve ist. 2 ●

f) Die Tangenten AC und BC schließen mit der Kurve ein Flächenstück ein. Berechne seinen Flächeninhalt. 3 ●

[**Lösungen:** a) $(x - 1)^2 + (y - \frac{31}{12})^2 = 2{,}77^2$ b) 5,33 / 24,11 ≙ 22,1% d) N_1(0/0) N_2(2/0) N_3(4/0) H(0,8/3,1) T(3,2/-3,1)

e) y = 8x f) A = $\frac{4}{3}$]

4. Sind Äpfel wirklich so gesund?

a) Die Apfellieferungen eines bestimmten Lieferanten an eine Lebensmittelkette enthalten erfahrungsgemäß 8% „beschädigte" Äpfel.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 zufällig ausgewählten Äpfeln mindestens zwei beschädigte Äpfel befinden? 2 ●

ii) Unter wie vielen Äpfeln findet man mit 98%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen beschädigten Apfel? 3 ●

iii) Ein Lebensmittelgeschäft bezieht 60% seiner Äpfel vom Lieferanten A (8% beschädigte Äpfel) und 40% vom Lieferanten B (10% beschädigte Äpfel). Ein Kunde kauft einen Apfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser beschädigt ist? 2 ●

b) Erfahrungsgemäß sind die Erträge einer Obstplantage in einer bestimmten Lage normalverteilt. Die durchschnittlichen Erträge betragen 26,3 kg mit einer Standardabweichung $\sigma = 8{,}8$ kg. In dieser speziellen Obstplantage sollen jene Obstbäume, von denen man nicht mehr als 19 kg Obst ernten kann, durch neue Bäume ersetzt werden.

i) Wie viel Prozent der Bäume der Plantage müssen erneuert werden? 2 ●

ii) Wie müssen die Toleranzgrenzen $[\mu - c ; \mu + c]$ gewählt werden, damit 80% des Ernteertrages in diesem Intervall liegen? 4 ●

iii) Beweise allgemein, dass bei einer Normalverteilung im Intervall $\mu \pm 3\sigma$ immer „fast alle" Werte der Normalverteilung liegen, d.h. 99,7%. 2 ●

c) Bis Äpfel geerntet werden können, müssen sie mehrmals mit Fungiziden und Pestiziden gespritzt werden. Eines der heute verwendeten Mittel enthält den für den Menschen schädlichen Wirkstoff Thiacloprid. Angenommen, es gäbe für dieses Mittel durch Umwelteinflüsse wie Regen, Sonneneinstrahlung, … einen exponentiellen Zerfall mit einer Halbwertszeit von 20 Tagen. Stelle ein Zerfallsgesetz der Form $N(t) = N_0 \cdot e^{-kt}$ auf.

i) Wie lautet die Zerfallskonstante k? 2 ●
[Kontrolle: k = 0,03466]

ii) Nach dem Spritzen betrage die Belastung 0,4 mg/kg. Wie viele Tage vor der Ernte muss man mindestens spritzen, damit die Konzentration bei der Ernte nur mehr 0,1 mg/kg beträgt? 2 ●

iii) Nach welcher Zeit sind nur mehr 10% der unmittelbar nach dem Spritzen vorhandenen Konzentration vorhanden? 3 ●

iv) Laut EU-Norm sollte die täglich vom Körper aufgenommene Thiaclopridmenge den Wert von 0,01 mg/kg Körpergewicht nicht überschreiten. Angenommen, ein Kind mit 12 kg isst an einem Tag 2 Äpfel (ca. 250 g), die mit 0,6 mg/kg belastet sind. Ist dieser Verzehr als bedenklich einzustufen? Begründe deine Entscheidung. 3 ●

[**Lösungen:** ai) 0,188 aii) 47 aiii) 0,088 bi) 20,3% bii) [15,02 ; 37,58] cii) 40 Tage ciii) 66 Tage civ) 0,0125 mg/kg]

90 - 79,5 ●	79 - 68,5 ●	68 - 56 ●	55,5 - 45 ●	44,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Kurvendiskussion

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{8x}{x^2 + 3}$

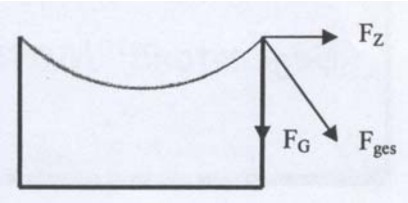
a) Untersuche die Funktion auf Symmetrie, berechne Asymptoten, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte und zeichne sie im Intervall [-5;5]. 11 •

b) Zeige, dass alle drei Wendepunkte auf einer Geraden g liegen. In welchem Verhältnis teilt diese Gerade den Flächeninhalt des Dreiecks, welches von der Wendetangente in W(3/2) und den beiden Koordinatenachsen im 1. Quadranten gebildet wird? Berechne den Flächeninhalt, welcher von der Funktion, der Wendetangente und der x-Achse im 1. Quadranten eingeschlossen wird. 10 •

[**Lösungen:** a) a: y = 0 N = W_1(0/0) T(-1,73/-2,31) H(1,73/2,31) W_2(-3/-2)) W_3(3/2) b) t_{W_3}: $y = -\frac{1}{3}x + 3$ g: $y = \frac{2}{3}x$ 1:2 A = 11,55]

2. Rotierendes Gefäß

Ein mit Wasser gefülltes zylindrisches Gefäß mit dem Bodendurchmesser 80 cm und der Höhe 50 cm rotiert um seine Achse. Durch die Rotation bildet die Wasseroberfläche ein Paraboloid, dessen Scheitel sich 40 cm über dem Boden befindet (siehe Skizze).



a) Wie viele Liter Wasser enthält das Gefäß? Wie hoch steht das Wasser im ruhenden Gefäß? 6 •

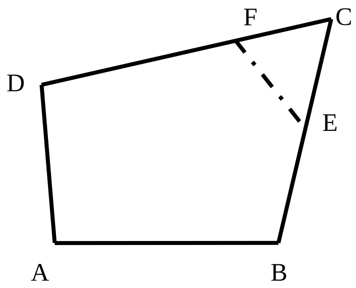
b) Wie groß ist der Winkel, den die Wasseroberfläche mit dem Gefäßrand einschließt? 6 •
Auf die Wasserteilchen am Gefäßrand wirken die Schwerkraft ($F_G = m \cdot g$) und die Zentrifugalkraft ($F_z = m \cdot v^2/r$). Die Gesamtkraft steht normal auf die Wasseroberfläche. Mit welcher Geschwindigkeit rotieren die Wasserteilchen am Gefäßrand, wie oft dreht sich das Gefäß pro Minute ($g = 9{,}81$ m/s^2)?

c) Welche Arbeit W ist erforderlich, um die gesamte Wassermenge über den Rand des (ruhenden) Gefäßes zu pumpen ($dW = g \cdot h \cdot dm$; Dichte des Wassers: 1000 kg/m^3)? 4 •

[**Lösungen:** a) par: $y = \frac{1}{16}x^2$ V = 226 l h = 45 cm b) 63,4° 1,4 m/s 33,4 U/min c) W = 610,2 J]

3. Grundstück im sumpfigen Gelände

Ein Grundstück hat die Form eines allgemeinen Vierecks ABCD. Der Eckpunkt C liegt im sumpfigen Gelände und ist daher unzugänglich. Man misst: AB = 54 m, AD = 49 m, $\angle$CBA = 94,3°, $\angle$BAC = 48° und $\angle$BAD = 96,9°.



a) Bestimme die Abstände von C zu A, B und D und berechne die Fläche des gesamten Grundstückes. 9 ●

b) Um zu verhindern, dass jemand unbeabsichtigt ins Sumpfgebiet gelangt, wird um den trockenen Teil des Grundstücks ein Zaun errichtet. Zu diesem Zweck wird ein Punkt E auf der Seite BC mit BE = 35 m und ein Punkt F auf CD mit DF = 40 m markiert. Wie viele Laufmeter Zaun hat die Umzäunung des Fünfecks ABEFC? 6 ●

d) Das gesamte Grundstück (ABCD) soll verkauft werden. Folgende Angebote liegen vor: 6 ●

A: 100 000 € Anzahlung, 180 000 € nach 5 Jahren.

B: 80 000 € Anzahlung sofort, ab dem nächsten Jahr 10-mal jährlich 20 000 € gleich zu Beginn jeden Jahres.

Mach eine Zeitleiste und entscheide durch Rechnung, welches Angebot unter Annahme von 4% Nettoverzinsung besser für den Verkäufer ist (berechne auf den Endwert).

[**Lösungen:** a) CA = 88,06 m CB = 65,62 m CD = 66,95 m A = 3 392,54 m^2 b) 211,63 m d) E_A = 367 021,95 €]

4. Apfelernte

a) Die Apfellieferungen eines bestimmten Lieferanten an eine Lebensmittelkette enthalten erfahrungsgemäß 8% „beschädigte“ Äpfel.

i) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 10 zufällig ausgewählten Äpfeln mindestens zwei beschädigte Äpfel befinden? 2 ●

ii) Unter wie vielen Äpfeln findet man mit 98%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens einen beschädigten Apfel? 3 ●

iii) Ein Lebensmittelgeschäft bezieht 60% seiner Äpfel vom Lieferanten A (8% beschädigte Äpfel) und 40% vom Lieferanten B (10% beschädigte Äpfel). Ein Kunde kauft einen Apfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieser beschädigt ist? 2 ●

b) Erfahrungsgemäß sind die Erträge einer Obstplantage in einer bestimmten Lage normalverteilt. Die durchschnittlichen Erträge betragen 26,3 kg mit einer Standardabweichung $\sigma = 8{,}8$ kg. In dieser speziellen Obstplantage sollen jene Obstbäume, von denen man nicht mehr als 19 kg Obst ernten kann, durch neue Bäume ersetzt werden.

i) Wie viel Prozent der Bäume der Plantage müssen erneuert werden? 2 ●

ii) Wie müssen die Toleranzgrenzen $[\mu - c ; \mu + c]$ gewählt werden, damit 80% des Ernteertrages in diesem Intervall liegen? 4 ●

iii) Beweise allgemein, dass bei einer Normalverteilung im Intervall $\mu \pm 3\sigma$ immer „fast alle“ Werte der Normalverteilung liegen. 2 ●

c) In der Steiermark erleiden jährlich im Mittel 0,4% der Obstbauern einen mehr als 80%-igen Ernteausfall durch Unwetter. Bei einer Versicherung sind 600 steirische Obstbauern versichert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss die Versicherung damit rechnen, dass sie im heurigen Sommer mehr als fünfmal für einen derart großen Schaden aufkommen muss? 7 ●

Überlege und begründe, welche der Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Binomial, Poisson, Gauss) für die Lösung dieser Aufgabe geeignet sind. Führe dann die Berechnung mit einer geeigneten Verteilung durch.

[**Lösungen:** ai) 0,188 aii) 47 aiii) 0,088 bi) 20,3% bii) [15,02 ; 37,58] c) 0,036]

5. Sind Äpfel wirklich so gesund?

Die Äpfel werden vor der Ernte mehrmals mit Fungiziden und Pestiziden gespritzt. Eines der heute verwendeten Mittel enthält den für den Menschen schädlichen Wirkstoff Thiacloprid. Dieser Wirkstoff wird durch Umwelteinflüsse (Regen, Sonneneinstrahlung, …) proportional zur Zeit t und zur vorhandenen Menge m abgebaut, wobei die Halbwertszeit 20 Tage beträgt.

a) Zeige, dass der Abbau exponentiell erfolgt und stelle das Abbaugesetz auf. 6 ●
[Kontrolle: $\lambda = 0{,}03466$]

b) i) Um wie viel Prozent ist die Belastung einen Monat (30 Tage) nach dem Spritzen gesunken? 6 ●

ii) Nach dem Spritzen betrage die Belastung 0,4 mg/kg. Wie viele Tage vor der Ernte muss man mindestens spritzen, damit die Konzentration bei der Ernte nur mehr 0,1 mg/kg beträgt?

iii) Laut EU-Norm sollte die täglich vom Körper aufgenommene Thiaclopridmenge den Wert von 0,01 mg/kg Körpergewicht nicht überschreiten. Angenommen, ein Kind mit 12 kg isst an einem Tag 2 Äpfel (ca. 250 g), die mit 0,6 mg/kg belastet sind. Ist dieser Verzehr als bedenklich einzustufen? Begründe deine Entscheidung.

[**Lösungen:** bi) 64,6% bii) 40 Tage ciii) 0,0125 mg/kg]

90 - 79,5 ●	79 - 68,5 ●	68 - 56 ●	55,5 - 45 ●	44,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Eine leicht ansteigende Brücke soll über einen Fjord gebaut werden. Von einem Punkt P des Ufers werden folgende Maße ermittelt: 1 ●
   - Entfernung zum Fußpunkt F_1 des am Ufer stehenden 1. Pfeilers a = 250 m; Höhenwinkel zu dessen Spitze α = 13,5°.
   - Entfernung zum Fußpunkt F_2 des am gegenüberliegenden Ufer befindlichen 2. Pfeilers b = 630 m; Höhenwinkel zu dessen Spitze β = 8,58°.
   - $\angle F_1PF_2 = \gamma$ = 64,72°.

   a) Wie hoch ist jeder Pfeiler?

   b) Wie breit ist die Meerenge?

   c) Wie lang wird die Brücke, wenn auf jeder Seite 120 m Brückenlänge als Anfahrt bis zum Pfeiler gerechnet werden müssen?

   [**Lösungen:** a) h_1 = 60,02 m h_2 = 95,05 m b) 569,98 m c) 811,06 m]

2. Gegeben ist das Dreieck ABC [A(1/-10), B(7/2), C(-5/14)]. 1 ●

   a) Ermittle den Umkreismittelpunkt U, den Höhenschnittpunkt H, den Schwerpunkt S sowie die Euler'sche Gerade e.

   b) Zeige: U, H, S liegen auf e

   c) Beweise: HS : US = 2 : 1

   [**Lösungen:** a) U(-6/1) H(15/4) S(1/2) e: -x + 7y = 13]

3. Herr Meier nimmt einen Kredit von 35 000 € auf (p_{eff} = 8,5%). Er kann 2 Jahre keine Rückzahlungen leisten. Dann zahlt er 5 Jahre Raten von 2 500 € (nachschießend). 1 ●

   a) Wie hoch müssen die Raten werden, wenn er in abermals 10 Jahren schuldenfrei sein soll?

   b) Beschreibe wie banküblich Verzinsung aussieht. Nenne etwaige anfallende Gebühren, die in dieser Rechnung nicht berücksichtigt wurden. Kannst Du Fallstricke nennen, die eine Rückzahlung wie berechnet in Frage stellen?

   [**Lösungen:** a) 9 210,01 €]

4. Diskutiere die Funktion $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. 1 ●

   [**Lösungen:** $N_{12}(\pm 1/0)$ H(0/0,25) a_{12}: x = ±2 a_3: y = 1]

5. Zwischen der Parabel $y^2 = 8x$ und der Ellipse $x^2 + 2y^2 = 36$ wird ein Flächenstück F eingeschlossen. Berechne das Volumen jenes Körpers, der entsteht, 1 ●

   a) wenn F um die x-Achse rotiert.

   b) wenn F um die y-Achse rotiert.

   Genaue Zeichnung von F und Schrägbilder der Rotationskörper!

   [**Lösungen:** a) $V_x = \frac{112\pi}{3} + 16\pi = \frac{160\pi}{3}$ b) $V_y = \frac{608\pi}{3} - \frac{32\pi}{5} = \frac{2944\pi}{15}$]

5 - 4,5 ●	4,5 - 3,75 ●	3,75 - 3 ●	3 - 2,5 ●	2,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Es ist ein Tetraeder mit der Grundfläche A, B, C und der Spitze D zu berechnen. Gegeben sind:
- A(2/3/1), B (6/-3/5)
- die Ebene, in der die Grundfläche liegt: $x + 4y + 5z = 19$
- die Spitze D(0/4/9)

Der Schwerpunkt S des Grundflächendreiecks liegt senkrecht unter der Spitze D (ist der Lotfußpunkt von D in der Ebene).

a) Berechne S *[Kontrolle: S(-1/0/4)]* 7 ●

b) Bereche C *[Kontrolle: C(-11/0/6)]* 5 ●

c) Berechne die Entfernung des Punkte D von der Grundfläche 4 ●

d) Berechne das Volumen des Tetraeders 8 ●

Fragen

Die Höhe des Tetraeders kann (wie Vieles) auf mehrere Arten berechnet werden.

i) Nenne eine zweite Möglichkeit und erkläre sie. 6 ●

ii) Wieso kann es wichtig sein, einen zweiten Weg zur Verfügung zu haben? 2 ●

iii) Falls du die zweite Methode auch ausführst, gibt es 4 - 8 Zusatzpunkte.

[**Lösungen:** a) S(-1/0/4) b) C(-11/0/6) c) $\sqrt{42}$ d) V = 126]

2. Kurvendiskussion, Flächenintegral

Der Graph einer reellen Funktion enthält den Punkt P(2/0), die erste Ableitung der Funktion lautet: $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

a) Berechne die Funktionsgleichung von f *[Kontrolle: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$]* 4 ●

b) Führe eine Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkt, Wendepunkt, Gleichung der Wendetangente) *[Kontrolle: $N_2(5/0)$, $E_1 = P$, $E_2(4/-4)$, W(3/-2)]* 17 ●

c) Berechne die Fläche, die durch die Gerade, die durch den Wendepunkt und die Nullstelle mit x > 2 geht, eingeschlossen wird 10 ●

d) Mache eine schöne Zeichnung (mit der Wendetangente und der Fläche) 6 ●

[**Lösungen:** b) N_1 = H(2/0) N_2(5/0) T(4/-4) W(3/-2) t_W: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ c) A = 24]

3. Wahrscheinlichkeitsrechnung

A Eine Maschine produziert Platten mit einer mittleren Stärke μ (Erwartungswert) vom 10 mm. Die Standartabweichung σ beträgt 0,02 mm.

a) Berechne den Ausschuss (in %), wenn folgende Bedingungen eingehalten werden müssen:

- Die Plattenstärke muss zwischen 9,95 mm und 10,02 mm liegen. 7 ●
- Die Plattenstärke darf nur $\pm$ 0,03 mm von μ abweichen. 4 ●

b) Berechne σ so, dass 92% der Produktion innerhalb einer Toleranzgrenze von $\pm$ 0,03 mm liegen (auf fünf Kommastellen genau). 5 ●

Fragen

i) Welche Konsequenzen für den Produktionspreis hat die Auflage in der Aufgabenstellung b (92% innerhalb einer Abweichung von 0,03 mm) gegenüber den Forderungen bei a? Begründe deine Antwort! 3 ●

ii) Wie wirken sich die Veränderungen bei den Parametern und der Toleranz auf den Produktionspreis aus? 3 ●

B Ein Bote muss vom Ort A zum Ort C gelangen und im Ort B (der zwischen A und C liegt) etwas abgeben. Auf dem Weg gilt es einige Hindernisse zu überwinden:

- Er muss über einen See schwimmen. Das schaffen 6 von 10 Leuten nicht.
- Dann muss er einen Fluss überqueren. Es gibt drei Brücken. Die erste ist mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,7 in Ordnung, die zweite mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,5 und die dritte mit einer Wahrscheinlichkeit von p = 0,4.

Jetzt ist er im Ort B.

- Abschließend muss er einen Berg überwinden, über den 4 Wege führen, von denen jeder im vergangenen Winter mit großer Wahrscheinlichkeit (p = 0,7) von Lawinen zerstört worden ist.

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der der Bote von A nach B gelangt. 5 ●

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, mit der der Bote von A nach C gelangt. 3 ●

Fragen

i) Welche beiden Muster bilden den Hintergrund dieser Aufgabe? 2 ●

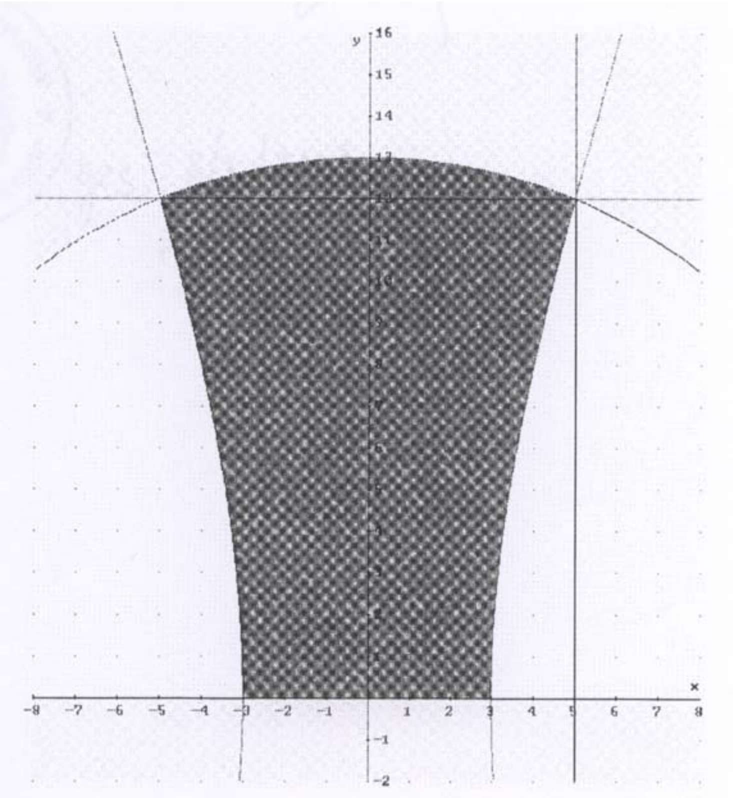
ii) Erkläre mit einem Baumdiagramm, wieso bei diesen Mustern unterschiedlich gerechnet werden muss. 4 ●

iii) Empfindest du die Wahrscheinlichkeit, dass der Bote von B nach C kommt, eher als groß oder eher als klein. Begründe deine Entscheidung! 3 ●

[**Lösungen:** [A] a) 0,165 0,225 b) 0,017136 [B] a) 0,364 b) 0,2766]

4. Kurven 2. Ordnung, Volumsintegral

Ein Werkstück entsteht durch die Rotation zweier Kurventeile (Hyperbel, Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung) um die y-Achse. Die Maße für die Kurvengleichungen sind aus der Zeichnung zu entnehmen.



a) Stelle die Gleichungen der beiden Kurven auf. *[Kontrolle: $x^2 + y^2 = 169$, $9x^2 - y^2 = 81$]* 6 ●

b) Berechne den Schnittwinkel der beiden Kurven. 8 ●

c) Berechne das Volumen. 14,5 ●

[**Lösungen:** b) 82,31° c) $V_y = \frac{554\pi}{3}$]

136,5 - 119 ●	118,5 - 101 ●	100,5 - 83 ●	82,5 - 65 ●	64,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

205016 **BG/BRG St. Veit an der Glan** **9300 Dr.-Arthur-Lemisch-Straße 15**
8A Mag. Sonja Malle

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

---

1. Das Tetraeder mit den Eckpunkten A(-6/3/-3), B(2/10/-1), C(10/-1/1), D(2/7/5) wird von einer Ebene geschnitten, die durch B geht und normal zur Kante AD ist. Berechne

   a) die Koordinaten der weiteren Eckpunkte P und Q des Schnittdreiecks, 4 •
   [Kontrolle: P(0/6/3), Q(6/0/0)]

   b) die Länge der Strecke PQ und das Maß des Winkels PBQ, 2 •

   c) das Volumen des abgeschnittenen Tetraeders und das Volumen des verbleibenden Tetraederstumpfes. 6 •

   [**Lösungen:** a) ε: 2x + y + 2z = 12 b) 9 56,3° c) V_{Stumpf} = 144 - 81 = 63]

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ $(a \neq 0)$.

   a) Wie viele Nullstellen, Extremstellen bzw. Wendestellen kann die Funktion f höchstens haben? Begründe die Antworten! 1 •

   b) Beweise: Ist α eine Nullstelle dieser Funktion, dann gilt $f(x) = (x - \alpha)\cdot g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^+$, wobei g eine Polynomfunktion vom Grad 3 ist. 3 •

   c) Welche Bedingung müssen die Koeffizienten a, b, c, d, e jeweils erfüllen, damit die Funktion genau zwei Wendestellen, genau eine Wendestelle bzw. keine Wendestelle besitzt? Von welchen Koeffizienten hängen diese Bedingungen nicht ab? 3 •
   [Kontrolle: Die Bedingung für das Vorliegen von genau einer Wendestelle lautet: $3b^2 = 8ac$]

   d) Ermittle eine Termdarstellung von f unter folgenden Voraussetzungen: 5 •
   - f hat in O(0/0) die Steigung 1.
   - f hat an der Nullstelle -1 die Steigung -3.
   - f besitzt genau eine Wendestelle.

   [**Lösungen:** d) $f_1(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x$ $f_2(x) = x^4 + x$]

3. Gegeben sind die Funktionen f_r und g_s mit $f_r(x) = e^{rx}$ und $g_s(x) = e^{-sx}$ $(r, s \in \mathbb{R}^+, r \neq)$.

   a) Zeige, dass diese Funktionen für alle $r, s \in \mathbb{R}^+$ den gleichen Schnittpunkt haben und skizziere die Graphen für r = s = 1. 2 •

   b) Welche Bedingung müssen r und s erfüllen damit die beiden Graphen einander unter einem rechten Winkel schneiden? 2 •

   c) Welchen Winkel schließen die Graphen von f_2 und g_2 miteinander ein? 2 •

   d) Die Graphen von f_r und g_s schließen mit der Geraden x = 1 eine Fläche ein. Wie groß ist deren Inhalt für r = s? 2 •

   e) Der Graph von f_3 rotiert im Intervall [-1;1] um die 1. Achse. Begründe, dass man das Volumen des entstehenden Drehkörpers als Integral darstellen kann! Berechne anschließend das Volumen dieses Drehkörpers (runde auf zwei Nachkommastellen). 4 •

   [**Lösungen:** a) S(0/1) b) $r\cdot s = 1$ c) 53,1° / 126,9° d) $A = \frac{1}{s}\cdot(e^s + e^{-s} - 2)$ e) V = 211,23]

4. Bei einer Fluggesellschaft wird ein Linienflug zwischen London und Paris mit einem Flugzeug durchgeführt, das 320 Sitzplätze hat. Erfahrungsgemäß werden nur 90% der gebuchten Plätze tatsächlich in Anspruch genommen.

a) Ermittle den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ der Anzahl der tatsächlich belegten Plätze und berechne anschließend, mit welcher Wahrscheinlichkeit mindestens 95% der Plätze besetzt sind. *[Kontrolle: $\mu = 288$, $\sigma = 5,37$]* 2 •

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit weicht die Anzahl der tatsächlich besetzten Plätze um höchstens 5 vom Erwartungswert ab? 1 •

c) Ermittle ein symmetrisches Intervall um μ, in dem die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit liegt. 1 •

d) Um die Plätze besser auszulasten, nimmt diese Fluggesellschaft Überbuchungen vor, d.h. nimmt mehr als 320 Buchungen für einen Flug entgegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nicht alle Fluggäste transportiert werden können, wenn 350 Buchungen entgegen genommen werden? 3 •

e) Die Fluggesellschaft behauptet, dass nur 12% der Flüge auf dieser Linie eine Verspätung von mehr als einer Stunde aufweisen. Jemand hält dies für untertrieben. Er untersucht die Aufzeichnungen der letzten 100 Flüge und stellt fest, dass 16% der Flüge eine Verspätung von mehr als einer Stunde aufwiesen. Kann er die Behauptung der Fluggesellschaft mit der maximalen Irrtumswahrscheinlichkeit 0,05 verwerfen? 3 •

f) Zur Überprüfung einer Nullhypothese wird eine Stichprobe vom Umfang n erhoben. In dieser ergibt sich für das untersuchte Ereignis die Häufigkeit H = k. Es wird ein einseitiger Test mit der Signifikanz $\alpha_0 = 0,05$ durchgeführt. Wie kann das Ergebnis dieses Tests interpretiert werden, wenn die Nullhypothese i) verworfen, ii) nicht verworfen wird? 2 •

[**Lösungen:** a) 0,0014 b) 0,6476 c) [274 ; 302] d) 0,1423 e) $P(H \geq 16) = 0,109$]

48 - 43 •	42 - 37 •	36 - 31 •	30 - 24 •	23 - 0 •
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Das Quadrat ABCD [A(-5/4/-3), B(3/4/3), C, D(-5/-6/z_4) ist Basis einer Pyramide, deren Spitze S_1 der Schnittpunkt der drei Ebenen ε_1: x - y + 2z = 9, ε_2: 5x + y + z = 6, ε_3: 2x + y - z = -3 ist.

 a) Berechne die Eckpunktkoordinaten C und D und die der Spitze S_1. 4 ●

 b) Berechne das Volumen der Pyramide. (Skizze!) 3 ●

 c) Zeige, dass sich das maximale Volumen einer regelmäßigen quadratischen Pyramide bei gegebener Seitenkante s durch den Term $\frac{4s^3}{9\cdot\sqrt{3}}$ bestimmen lässt. 5 ●

 d) Die Dreiecksfläche BCS_1 ist Basis eines Tetraeders, dessen Spitze S_2 den Schwerpunkt S des Dreiecks BCS_1 als Fußpunkt hat und dessen Körperhöhe $h_2 = 6$ beträgt (Strecke SS_2 = 6). Berechne die Koordinaten von S_2 und deren Abstand von der Basisebene ABCD der Pyramide (2 Lösungen). 5 ●

 e) Berechne den Winkel, der die Eckpunkte A, S_1, B einschließt. 3 ●
 Vergiss nicht auf die vollständige Skizzierung!

 [**Lösungen:** a) D(-5/-6/-3) C(3/-6/3) S_1(1/-2/3) b) V = 40 d) S_2($\frac{7}{3}$/-$\frac{4}{3}$/-3) d = 4,4 S_2'($\frac{7}{3}$/-$\frac{4}{3}$/9) d' = 5,2 e) 68,58°]

2. Von einer Polynomfunktion 4. Grades kennt man die erste Ableitung $f'(x) = \frac{x^3}{4} - 3x$. Die Funktion geht durch den Punkt P(4/-3).

 a) Berechne die Funktionsgleichung. *[Kontrolle: f(x) =* $\frac{x^4}{16} - \frac{3x^2}{2} + 5$ *]* 1 ●

 b) Untersuche f auf Definitionsbereich, Nullstellen, Extremstellen, Art der Extremwerte, Wendepunkte und Wendetangenten, Monotonie und Krümmungsverhalten und zeichne den Graphen von f im Intervall]-5;5[(Einheit: 1 cm). 12 ●

 c) Wie lauten die Gleichungen jener Kreise, die als Mittelpunkt die Tiefpunkte T_1 ,T_2 und die Wendetangenten t_1, t_2 berühren? Zeichne k_1 und k_2 ebenfalls in den Graphen ein! 4 ●

 d) Wie groß ist die Fläche, die die Kurve mit ihren Wendetangenten einschließt? 3 ●

 e) Dieses Flächenstück rotiert um die 1. Achse. Berechne das entstehende Volumen. 4 ●

 [**Lösungen:** b) N_{12}(±4,47/0) N_{34}(±2/0) H(0/5) T_{12}(±3,46/-4) W_1(-2/0) t_{W_1}: $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

 W_2(2/0) t_{W_2}: $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ c) k_{12}: $(x \pm 3,46)^2 + (y + 4)^2 = 0,2$ d) A = 3,2 e) V = 34,96π]

3. Ein Grundstück hat die Form eines allgemeinen Vierecks mit AB = a = 62 m, BC = b = 25 m, AC = e = 65 m, $\angle BAD = \alpha = 40°$ und $\angle BCD = \gamma = 130°$.

a) Zeichne das Grundstück im Maßstab 1:500. 2 ●

b) Leite die trigonometrische Flächenformel für allgemeine Dreiecke her (Skizze!) und berechne damit die Fläche dieses Grundstücks. 10 ●

c) Das Grundstück soll gegen ein flächengleiches Grundstück getauscht werden von der Form eines gleichschenkeligen Dreiecks mit dem Winkel an der Spitze zwischen den beiden Schenkeln $\gamma = 110°$. Wie lang sind die Seiten des neuen Grundstücks? 3 ●

d) Das Grundstück wird zum Kauf angeboten. Der Preis pro m^2 beträgt 70 €. Ein Käufer bietet an, sofort 40000 € anzuzahlen und den Rest in drei Jahren seiner Bank zurück zu zahlen. Welcher Teilbetrag ist in drei Jahren bei einem effektiven Zinssatz von 4,5% noch fällig? 3 ●

e) Vom Punkt C aus sieht man mit dem Fernglas die Spitze eines auf einem Berg stehenden Gipfelkreuzes unter einem Höhenwinkel $\alpha = 3{,}6°$ und den Fußpunkt dieses 40 m hohen Kreuzes unter einem Höhenwinkel β von 2,9°. Berechne die Höhe H des Berges und seine Entfernung von C. (Skizze!) 6 ●

[**Lösungen:** b) A = 1327,86 m^2 c) a = 53,16 m c = 87,09 m d) 57822,94 € e) H = 164,86 m d = 3253,99 m]

4. Beim Fußballtraining zur Euro 2008 soll jeder Spieler der österreichischen Nationalelf 7 Schüsse auf das Tor abgeben. Wer am meisten Tore schießt hat gewonnen. Beim letzten Training zum Erstrundenspiel gegen Deutschland hatte der Torschütze eine Trefferwahrscheinlichkeit von 70%. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass der Torschütze

a) höchstens 3 Tore / genau 5 Tore / mindestens 6 Tore erzielt. 7 ●

b) Berechne ebenso den Erwartungswert und gib an, um wie viel dieser Wert voraussichtlich nach oben und unten schwankt. 2 ●

c) Beschreibe die Verteilung der Zufallsvariablen X durch die Wahrscheinlichkeitsfunktion (Tabelle, Graph) und zeichne außerdem die Streuung mit dem Erwartungswert in die Wahrscheinlichkeitsfunktion ein. 2 ●

d) Von wie vielen Torschüssen geht mit 95%-iger Wahrscheinlichkeit mindestens ein Torschuss ins Netz? 3 ●

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit „Stetigkeitskorrektur", dass bei 100 Torschüssen mindestens 55 und höchstens 80 Tore erzielt werden? 3 ●

f) Eine Fabrik produziert Fußbälle. Die Lederstärke der Fußbälle sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 4$ mm und $\sigma = 0{,}05$ mm. Wie viel Prozent Ausschuss sind zu erwarten, wenn die Fußbälle mindestens 3,95 mm bzw. höchstens 4,10 mm stark sein sollen? 3 ●

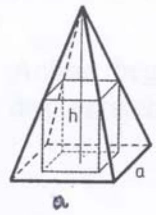
[**Lösungen:** a) 0,126 0,318 0,329 b) $\mu = 4{,}9$ $\sigma = 1{,}21$ d) 3 e) 0,989 f) 0,023]

88 - 77 ●	76 - 66 ●	65 - 55 ●	54 - 44 ●	43 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

205016 **BG/BRG St. Veit an der Glan** **9300 Dr.-Arthur-Lemisch-Straße 15**
8B^{RG} Mag. Doris Oberlerchner-Bischof

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Die Glaspyramide im Innenhof des Louvre hat die Form einer quadratischen Pyramide mit der Grundkante a = 35 m und der Körperhöhe h = 21,65 m. Es möge im Zuge einer Ausstellung darin ein quadratisches Prisma mit möglichst großem Volumen eingeschrieben werden. Die Mantelfläche des Prismas soll innen und außen als Plakatwand dienen.



a) Berechne das Volumen des Prismas zuerst allgemein mit den Variablen a und h und setze erst dann die Werte der Glaspyramide ein. 8 •

b) Welchen relativen Anteil am Volumen der Pyramide macht das Volumen des Prismas aus? 2 •

c) Wie viel m^2 Plakatfläche stehen zur Verfügung? 2 •

[**Lösungen:** a) $V_{max} = \frac{4}{27}a^2h = 3929\ m^3$ b) $\frac{4}{9}$ c) $1347\ m^2$]

2. a) Bei der letzten Wahl errang die Partei X 44% der Stimmen. Ein Jahr danach berichten die Meinungsforscher, dass von 500 Personen bei einer Wahl „am nächsten Sonntag“ 200 für die Partei X votieren würden. Teste mit α = 5% Irrtumswahrscheinlichkeit, ob die Partei X „wirklich“ schwächer geworden ist und interpretiere dein Ergebnis Bezug nehmend auf den Ablehnungsbereich. 4 •

b) Die Partei B hatte bei der letzten Wahl 43,5% der Wähler auf sich vereinigt und würde dies - wenn man die Stimmung richtig einschätzt - voraussichtlich auch heute tun. „Zur Sicherheit“ will der Parteivorstand auf 95%-Sicherheitsniveau den derzeitigen Wähleranteil auf 1,5%genau schätzen lassen. Wie viele Personen müssen befragt werden? 4 •

c) Während einer Fernsehkonfrontation zwischen den vier Parteivorsitzenden wurde eine telefonische Blitzumfrage gemacht. Von den 200 Befragten entschieden sich 18 für den Kandidaten C. Berechne daraus für den Vorsitzenden der Partei C ein 95%-Vertrauensintervall für den Anteil der Stimmen in der Gesamtbevölkerung. 4 •

[**Lösungen:** a) Ablehnungsbereich = [0;201] b) 4200 c) [0,05769;0,13777]]

3. Gegeben sind die Geraden g: $X = (-2/4/2) + s\cdot(2/1/4)$ und h: $X = (5/-3/4) + t\cdot(-1/3/2)$ sowie das Dreieck ABC [A(-4/-9/1), B(3/3/-1), C(6/-1/-3)]. Das Dreieck ABC ist die Grundfläche eines Tetraeders, der Schnittpunkt von g und h dessen Spitze S. *[Kontrolle: S(2/6/10)]*
Berechne

a) das Volumen des Tetraeders; 4 ●

b) den Neigungswinkel φ der Kante AS gegen die Grundfläche ABC. 4 ●

c) Zeige mit Hilfe des Cosinus-Satzes , dass für das Winkelmaß φ der vom Nullvektor verschiedenen Vektoren a, b $\in \mathbb{R}^2$ gilt: $\cos\varphi = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}$. 4 ●

[**Lösungen:** a) V = 108 b) 29,12°]

4. Die Hauptscheitel einer Ellipse in erster Hauptlage haben von den Nebenscheiteln den Abstand $5 \cdot \sqrt{5}$, die Brennweite beträgt $e = 5 \cdot \sqrt{3}$.
[Kontrolle: ell: $x^2 + 4y^2 = 100$]

a) Ermittle eine Gleichung jener Parabel in erster Hauptlage, die die Ellipse im Berührpunkt T einer zu g: $3x + 8y = 24$ parallelen Ellipsentangente schneidet. 4 ●
[Kontrolle: par: $y^2 = \frac{8}{3}x$]

b) Beweise, dass für eine Ellipse ell in 1. Hauptlage mit den Halbachsenlängen a und b gilt: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. 4 ●

c) Das von der Parabel, der Parabeltangente in T und der y-Achse begrenzte Flächenstück rotiert um die x-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Drehkörpers. 4 ●

[**Lösungen:** c) $V_x = 8\pi$]

48 - 45 ●	44 - 39 ●	38 - 31 ●	30 - 24 ●	23 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

205026 **BORG „Auer von Welsbach“ Althofen** 9330 Friesacher Straße 4
8A Mag. Wolfgang Rauchenwald

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Nach dem Sturm „Paula“ wurde auf einem Holzlagerplatz eine Stichprobe von 20 Baumstämmen, deren Stammdurchmesser gemessen wurde, ausgewählt. 4 ●

   Stammdurchmesser in cm: 11, 17, 31, 48, 45, 40, 47, 57, 12, 9, 33, 42, 18, 9, 68, 73, 60, 61, 23, 16.

   Es wird angenommen, dass die Durchmesser der Stämme annähernd normalverteilt sind, wobei Erwartungswert und Standardabweichung mit den Werten der Stichprobe übereinstimmen sollen.

   a) Wie viel % der Stämme haben einen Durchmesser zwischen 29 cm und 37,5 cm und sind daher für Bretterware geeignet?
   b) Wie viel % der Stämme sind für Bauholz geeignet, wenn für Bauholz ein Mindestdurchmesser von 37,5 cm gefordert ist?
   c) Ab welchem Durchmesser gehört ein Stamm zu den stärksten 30%?
   d) Stämme bis zu einem Durchmesser von 18 cm können nur als Schleifholz gebraucht werden. Wie viel % gibt es davon?
   e) Für spezielles Konstruktionsholz braucht man Stämme mit Durchmesser zwischen 18 cm und 29 cm: Wie viel % sind dafür geeignet?

   [**Lösungen:** a) 15,72% b) 47,21% c) 47,02 cm d) 19,76% e) 17,30%]

2. Die Parabel par: $x^2 = 8y$ rotiert in den Grenzen von $y_1 = 0$ und $y_2 = 8$ um die y-Achse und erzeugt somit einen parabolischen Becher (alle Längeneinheiten in cm). 4 ●

   a) Wie viele Liter fasst der Becher?
   b) Welchen Winkel schließt bei voll gefülltem Becher die Wasseroberfläche mit dem Becherrand ein?
   c) In diesen mit Wasser gefüllten Becher wird eine Kugel vom Radius $r = 8$ cm, deren Mittelpunkt 10 cm vom Scheitel der Parabel entfernt ist, gelegt: Wie viele Liter Wasser fließen dadurch aus?

   [**Lösungen:** a) 0,804 l b) 63,43° c) 0,678 l]

3. Der zeitliche Verlauf eines Tollwut-Seuchenzuges in einem Bundesland ist gegeben durch die Funktion $N(t) = 50 \cdot t \cdot e^{1-t}$, wobei t die Zeit in Jahren nach dem ersten Auftreten eines Krankheitsfalles und N(t) die Anzahl der erkrankten Tiere zum Zeitpunkt t darstellen. 4 ●

   a) Der Verlauf ist nach Ausführen einer entsprechenden Kurvendiskussion grafisch darzustellen.
   b) Wie könnte der Funktionsterm und der entsprechende grafische Verlauf aussehen, wenn sofort nach dem Auftreten der ersten Krankheitsfälle eine Impfaktion durchgeführt wird?
   c) Wie könnten sich Funktionsterm und Grafik ändern, wenn in der Zeit der Meisterkrankungen noch Witterungsverhältnisse herrschen, die eine Ansteckung eher fördern als hemmen?

   [**Lösungen:** a) N(0/0) H(1/50) W(2/36,78) b) z.B. $30 \cdot t \cdot e^{1-2t}$ c) z.B. $100 \cdot t \cdot e^{1-0,5t}$]

4. Gegeben ist das Dreieck ABC [A(1/1), B(13/13), C(-11/7)]. Berechne 4 ●

a) die Koordinaten des Umkreismittelpunktes U,
b) die Koordinaten des Höhenschnittpunktes H,
c) die Gleichung der Euler'schen Geraden e.
d) Überprüfe, dass für den Schwerpunkt S gilt: S liegt auf e und S ist von H doppelt so weit entfernt wie von U.
e) Der ganze Sachverhalt ist auch zeichnerisch darzustellen.

[**Lösungen:** a) U(0/14) b) H(3/-7) c) e: $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix}$ d) S(1/7)]

16 - 14,5 ●	14 - 13 ●	12,5 - 10 ●	9,5 - 8 ●	7,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

205026 **BORG „Auer von Welsbach“ Althofen** **9330 Friesacher Straße 4**
8B Mag. Harald Tranacher

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Der Intelligenzquotient (IQ) ist eine Kenngröße zur Bewertung des allgemeinen intellektuellen Leistungsvermögens. Die IQ-Werte einer bestimmtem Bevölkerungsschicht sind annähernd normalverteilt mit dem Erwartungswert μ = 100 und der Standardabweichung σ = 15.

a) Wie viel % der Bevölkerung haben einen IQ über 115 / unter 90 / zwischen 90 und 110? 3 •

b) Es gelten ca. 2,2% der Menschen als hochbegabt. Ab welchem JQ ist dies der Fall? 2 •

c) In welchem Bereich (symmetrisch zu μ) liegt der IQ von 90% der Bevölkerung? 3 •

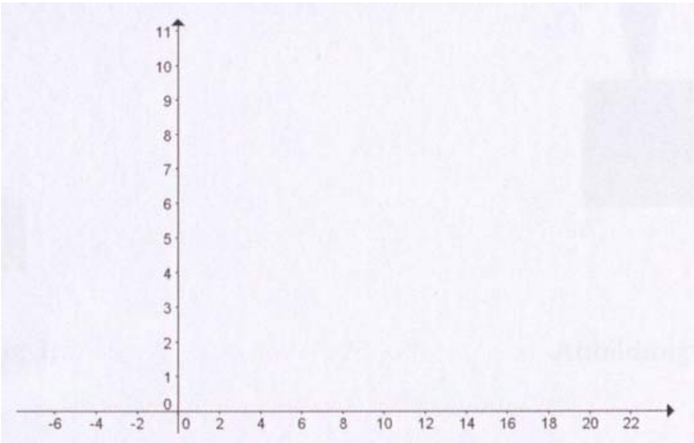
[**Lösungen:** a) 0,1% 2,3% 95,5% b) 111 c) [91,75; 108,25]]

2. Differentialrechnung

a) Die maximale Geschwindigkeit eines Schiffes beträgt v_{max} = 22 sm/h (in sm/h = Seemeilen/h = Knoten), wobei der stündliche Brennstoffverbrauch B (in Tonnen = t) in Abhängigkeit der Geschwindigkeit v mit Hilfe einer Polynomfunktion 3. Grades der Form $B(v) = a + b\cdot v + c\cdot v^3$ dargestellt werden kann. Wie lautet die Funktionsgleichung wenn 3 •
- das Schiff bei Stillstand 0,3 t Treibstoff verbraucht;
- das Schiff bei einer Geschwindigkeit von 10 sm/h 1,3 t und bei 20 sm/h 8,3 t Treibstoff verbraucht?

b) Besitzt diese Funktion Nullstellen, lokale Extrema und Wendepunkte? 3 •
Bei welcher Geschwindigkeit ist der Treibstoffverbrauch maximal?

c) Zeichne den Graph dieser Funktion in das gegebene Koordinatensystem ein. 2 •
Welches Intervall ist für die Geschwindigkeit sinnvoll?



[**Lösungen:** a) $B(v) = 0,3 + 0,001\cdot v^3$ b) N(-6,69/0) W(0/0,3) B(22) = 10,948 t]

3. Integralrechnung

a) Auf der Funktion f: $y = (\frac{x^2}{8} + 2)^2$ liegt der Punkt P(4/y). 4 ●

Im Punkt P wird die Tangente t an die Funktion f gelegt.

a1) Wie lautet die Gleichung der Tangente t und welchen Winkel schließt sie mit der positiven x-Achse ein?

a2) Zwischen der Funktion f, der Tangente t und der x-Achse befindet sich die Fläche A. Kennzeichnen Sie die Fläche in Abbildung 1!

b) Wenn die Fläche A um die y-Achse rotiert, entsteht ein Glaspokal (siehe Abbildung 2). 4 ●

b1) Wichtig für die Siegesfeier: Wie viel Sekt passt in den Pokal (Einheiten in cm)?

b2) Wie groß ist das Glasvolumen (ohne Sockel)?

b3) Der Pokal erhält außen einen Silberüberzug. Was kostet dieser, wenn 1 dm^2 EUR 20,- kostet?

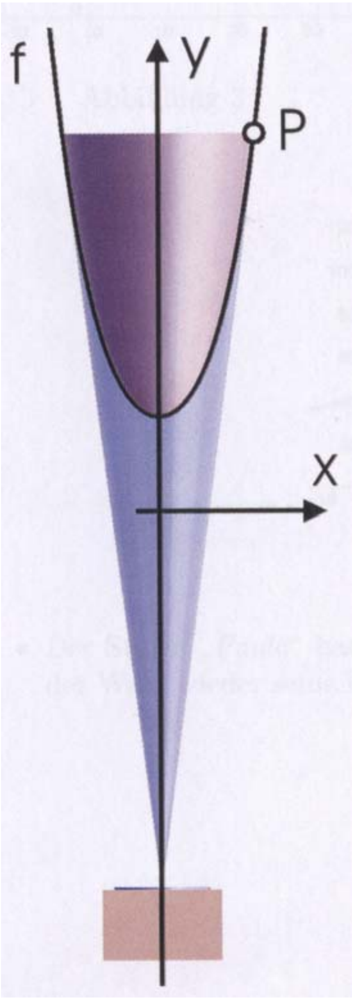


Abb. 1

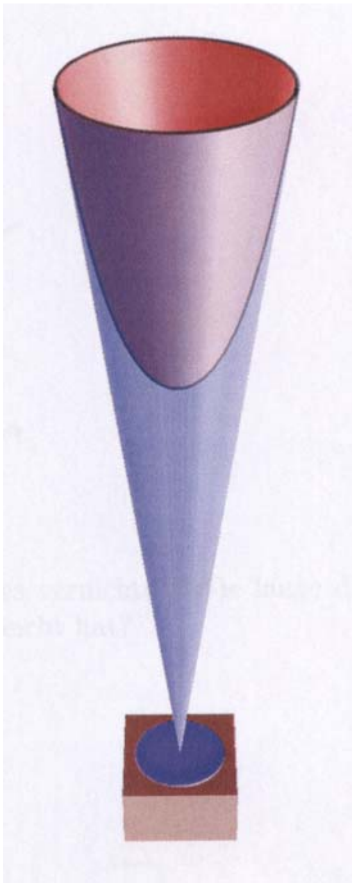


Abb. 2

[**Lösungen:** a1) P(4/16) t: y = 8x - 16 82,9° b1) 335,10 cm^3 b2) 201,06 cm^3 b3) EUR 81,-]

4. Wachstum

a) Der Holzbestand H eines Waldes beträgt zur Zeit 45000 m^3 und wächst um ca. 4% jährlich. **5 ●**

a1) Stelle eine Funktion des Holzbestandes H(n) in Abhängigkeit der Jahre dar.

a2) Wie groß ist der Holzbestand nach 0 / 5 / 10 Jahren?

a3) Wann hat sich der Holzbestand verdoppelt?

b) **3 ●**

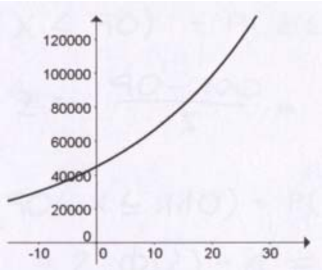


Abb. 3

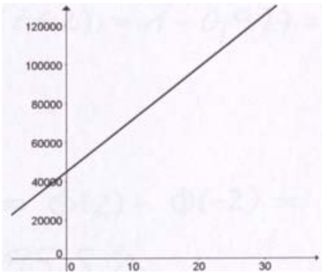


Abb. 4

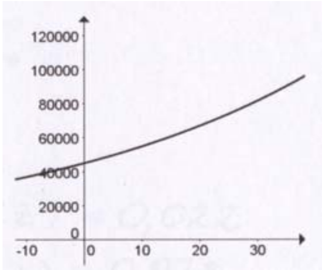


Abb. 5

b1) Welche der oben dargestellten Funktionen beschreibt den Wachstumsprozess des Waldes? Begründe!

b2) Der Sturm „Paula“ hat 2/3 des gesamten Waldes vernichtet. Wie lange dauert es, bis der Wald wieder seine ursprüngliche Größe erreicht hat?

[**Lösungen:** a1) $H(n) = 45000 \cdot 1{,}04^n$ a2) 45000 m^3 54749 m^3 66611 m^3 a3) $\approx$ 18 J b1) Abb. 3 b2) $\approx$ 28 J]

32 - 29 ●	28 - 25 ●	24 - 20 ●	19 - 16 ●	15 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

205036 **BG Tanzenberg** **9063 Maria Saal**
8A Mag. Margit Cvetko

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Ein viereckiges Grundstück mit den Abmessungen AB = 93 m, BC = 57 m, $\angle DAB = \alpha = 63°$, $\angle ABC = \beta = 76°$, $\angle BCD = \gamma = 125°$ soll im Zuge einer Grenzvereinfachung die Gestalt eines flächengleichen Dreiecks erhalten, wobei die Seite a und der Winkel β unverändert bleiben sollen.
   a) Berechne die Abmessungen des neuen dreieckigen Grundstücks. 6 ●
   b) Vergleiche den Umfang des viereckigen Grundstücks mit dem Umfang des dreieckigen Grundstücks. 2 ●

   [**Lösungen:** a) $A = 4400{,}18\ m^2$ $x = 97{,}52$ m $y = 117{,}35$ m b) $U_4 = 276{,}16$ m $U_3 = 307{,}87$ m]

2. Der Graph der Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat im Ursprung die Steigung k = 3 und im Punkt E(6/0) eine waagrechte Tangente. Der Graph der Funktion $g(x) = px^2 + qx + r$ hat eine waagrechte Tangente an der Stelle x = 3 und schneidet die Kurve f(x) im Ursprung rechtwinkelig.
   a) Bestimme die Funktionsgleichungen f(x) und g(x). 2 ●
   b) Diskutiere die Funktionen und zeichne ihre Graphen (Einheit 1 cm) im Intervall [-1;7]. 4 ●
   c) Berechne den Inhalt des Flächenstücks, das von den beiden Graphen eingeschlossen wird. 2 ●

   [**Lösungen:** a) $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x^2 + 3x$ $g(x) = \frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{3}x$ b) f: $N_1(0/0)$ $N_2 = T(6/0)$ $H(2/\frac{8}{3})$ $W(4/\frac{4}{3})$ t_W: $y = -x + \frac{16}{3}$
   g: $N_1(0/0)$ $N_2(6/0)$ $T(3/-\frac{1}{2})$ c) A = 11]

3. In einem Betrieb werden für die Fußball EM Werkstücke hergestellt, deren Länge genau 200 mm betragen soll. Die Maschine arbeitet mit einer Standardabweichung von 3 mm.
   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge der Werkstücke 4 ●
      a_1) zwischen 195 mm und 205 mm liegt?
      a_2) kleiner als 191,5 mm ist?
      a_3) größer als 206 mm ist?
      a_4) um mehr als 4 mm von der gewünschten Länge abweicht?
      Skizziere die Ergebnisse von a_1) bis a_4)!
   b) Berechne jenes Intervall, in dem 99% der beobachteten Werte zu erwarten sind. 2 ●
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung hast du die Fragestellungen des Beispiels gelöst? Erläutere sie! 2 ●

   [**Lösungen:** a_1) 0,9051 a_2) 0,0023 a_3) 0,0228 a_4) 0,1835 b) [192,26;207,74]]

4. Für eine Blumenausstellung bestellt ein Florist ein besonders schönes Gefäß. Das Gefäß entsteht durch Rotation der Fläche zwischen der Parabel par: $y = 1/2\cdot(x^2 + 1)$, den Tangenten, die vom Punkt P(0/-4) an die Parabel gelegt werden, der x-Achse und der Geraden y = 4 um die y-Achse.
   a) Berechne den Materialbedarf für dieses Gefäß. 5 ●
   b) Gib die Höhe des Wasserspiegels an, wenn 20 ml Wasser eingefüllt werden. 3 ●
      Kann die Bedingung des Floristen, die Blumen nicht mehr als 3,5 cm ins Wasser zu stellen, erfüllt werden?

   [**Lösungen:** a) t_{12}: $\pm 3x - y = 4$ $V = 16{,}59\pi - 12{,}25\pi = 13{,}63$ b) h = 3,02]

32 - 29 ●	28 - 25 ●	24 - 20 ●	19 - 16 ●	15 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

205036 **BG Tanzenberg** **9063 Maria Saal**
8B Mag. Mathilde Kanovski

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -10\cdot(x - 3)^2 + 250$.

   a) Ermittle die Null- und Extremstellen von f und zeichne den Graphen von f für $0 \leq x \leq 8$. 2 ●

   b) Zeichne die Sekantenfunktionen von f in den Intervallen $[0;2]$, $[0;4]$, $[0;6]$ und $[0;8]$ ein und berechne die Steigungen dieser Funktionen. 2 ●

   c) Deute den Differenzenquotienten von f in $[0;2]$ auf drei Arten. 2 ●

   d) Für welche $z \in\ ]0;8]$ ist der Differenzenquotient von f in $[0;z]$ positiv / negativ / null? 2 ●

   e) Für welches $z \in\ ]0;8]$ ist der Differenzenquotient von f gleich -10? 1 ●

   f) Ermittle den Differentialquotienten f'(x) als Limes des Differenzenquotienten. 1 ●

   g) Berechne f'(1) und deute das Ergebnis auf eine Art. 1 ●

   [**Lösungen:** a) $N_1(-2/0)$ $N_2(8/0)$ H(3/250) b) 40 20 0 -20 d) $z < 6$ $z > 6$ $z = 6$ f) $-20\cdot(x - 3)$ g) f'(1) = 40]

2. Der neu gegründete Lehrerchor des Gymnasiums besteht aus 15 weiblichen und 10 männlichen Mitgliedern. Die Zahl der Anwesenden bei der wöchentlichen Chorprobe schwankt sehr stark. Um diese Schwankung durch ein Modell zu beschreiben, soll davon ausgegangen werden, dass die Mitglieder unabhängig voneinander und jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% an einer Probe teilnehmen.

   a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Chorprobe mindestens 24 Mitglieder anwesend sind? 2 ●

   b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlen bei der Chorprobe genau 3 Sängerinnen und 2 Sänger? 2 ●

   c) Für die nächste Chorprobe haben sich 5 Mitglieder entschuldigt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fehlt bei dieser Probe höchstens noch ein weiteres Chormitglied? 2 ●

   d) Unter den 10 Männern des Chors sind 2 Tenöre, 5 Baritone und 3 Bässe. Bei der Maturafeier der 8. Klassen singen ein Tenor, zwei Baritone und 2 Bässe in einem Quintett. 2 ●

      d_1) Wie viele Zusammenstellungen des Quintetts aus den Sängern sind hiefür möglich?

      d_2) Nach ihrem Auftritt stellen sich die 5 Sänger nebeneinander auf und verbeugen sich. Wie viele Möglichkeiten der Anordnung gibt es dafür wenn keine weiteren Bedingungen vorliegen?

   [**Lösungen:** a) 0,093 b) 0,060 c) 0,176 d_1) 60 d_2) 120]

3. Petra möchte dem Maturastress entkommen, zwei Wochen vor der Matura unternimmt sie deswegen einen Orientierungslauf. Petra läuft vom Ort A 2,6 km nach B, dort weicht sie unter dem Winkel $\beta = 34°$ nach links ab und gelangt nach weiteren 1,8 km zu Ort C. In C biegt sie unter dem Winkel $\gamma = 56°$ wieder nach links ab und gelangt nach weiteren 2,2 km zu Ort D.

   a) Um welchen Winkel muss Petra sich nach links drehen um direkt nach A zurück laufen zu können? 3 ●

   b) Wie groß ist die Entfernung zum Ausgangspunkt A zurück? 2 ●

   Eine Woche vor der Matura macht sie eine „Querfeldein-Fahrradtour“. Auf einer geradlinigen Straße liegen der Startpunkt S und 12 km entfernt der Punkt M. 5 km von M entfernt liegt im rechten Winkel zur Straße der Zielpunkt Z im unwegsamen Gelände.

   c) Wie viele km vom Start S entfernt muss Petra abzweigen, wenn sie auf der Straße mit 30 km/h und im Gelände mit 10 km/h unterwegs ist, um in kürzester Zeit zum Ziel zu gelangen? 3 ●

   d) Um wie viele Minuten ist sie schneller, wenn sie diesen Weg wählt und nicht von vornherein von S nach Z fährt? Wie lange würde sie brauchen, wenn sie von S nach M und dann von M nach Z fährt? 2 ●

   [**Lösungen:** a) ≈ 128° b) 5,199 km c) 10,23 km d) 26 min]

4. In einer kleinen Kirche steht ein Taufbecken aus Marmor. Die äußere Begrenzung des Taufbeckens ist durch die Form eines halben einschaligen Drehhyperboloids (1. Hauptlage) mit der Gleichung $4x^2 - 16y^2 = 25$ gegeben, die innere Begrenzung besteht aus einem Drehparaboloid mit der Gleichung $y = 0{,}1x^2 + 0{,}5$. Das Taufbecken hat eine Höhe von 3 dm und ist bis 0,8 dm unter dem Rand mit Wasser gefüllt.

   a) Visualisiere den Sachverhalt durch eine möglichst genaue Skizze. 2 ●

   b) Berechne die Masse des Taufbeckens (exkl. Wasserfüllung), wenn die Dichte von Marmor mit $\rho = 2{,}7$ kg/dm³ gegeben ist. 3 ●

   c) Wie viele Liter Wasser befinden sich im Taufbecken? 3 ●

   d) Nach einem Monat sind wegen Verdunstung nur noch 35 Liter im Becken. Wie hoch steht nun das Wasser? 2 ●

   [**Lösungen:** b) 199,33 kg c) 45,4 l d) h ≈ 2 dm]

41 - 37 ●	36 - 31 ●	30 - 25 ●	24 - 20,5 ●	20 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

206016 **BG „Porcia" Spittal an der Drau** **9800 Zernattostraße 10**
8A Mag. Helga Pfingstner

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Die Funktion $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ schneidet $g(x) = x^2 - 5x + 4$ in deren Nullstellen und hat im Punkt P(0/-4) die Steigung 9. 8 •
   a) Ermittle f(x). *[Kontrolle: a = 1, b = -6, c = 9, d = -4]*
   b) Berechne von beiden Funktionen die Extremwerte und ihre Schnittpunkte.
   c) Zeichne beide Funktionen (Einheit: 1 cm).
   d) Berechne die von f(x) und g(x) eingeschlossene Fläche.

[**Lösungen:** b) f: H(1/0) T(3/-4) g: T(2,5/-2,25) S_1(1/0) S_2(2/-2) S_3(4/0) d) $A = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$]

2. Die Bevölkerung des antiken Rom hatte zur Zeit um Christi Geburt 1 Million Einwohner und 1000 Jahre später nur noch 20000 Einwohner. 6 •
   a) Nimm lineare Abnahme an und erstelle eine Formel für die Einwohnerzahl nach t Jahren. Wie hoch ist die jährliche Abnahme bei diesem Modell?
   b) Nimm exponentielle Abnahme (e-Funktion) an und erstelle ebenfalls eine Formel. Wie kann hier die jährliche Abnahme erklärt werden?
   c) Welches Modell entspricht eher der Realität?
   d) Zeichne beide Graphen in ein Koordinatensystem. (Einheiten: x-Achse: 100 Jahre ≙ 1 cm; y-Achse: 100000 Einwohner ≙ 1 cm)
   e) Bei welchem Modell und wann wäre die Bevölkerung Roms ausgestorben?
   f) Wann ist bei beiden Modellen nur noch die Hälfte der ursprünglichen Einwohnerzahl vorhanden? Ermittle diesen Zeitpunkt rechnerisch und grafisch.

[**Lösungen:** a) $N(t) = -980t + 1000000$ b) $N(t) = 1000000 \cdot e^{-0{,}003912t}$ e) linear: t = 1020,4 f) lin.: 510,2 J exp.: 177,18 J]

3. Der Querschnitt eines Dachbodens hat die Form eines gleichschenkeligen Dreiecks mit einer Höhe von 5 m und einer Basis von 14 m. Der Dachbodenraum ist 17 m lang. Der Besitzer will den Dachboden ausbauen und dabei senkrechte Wände und eine waagrechte Decke haben.
   a) Er will dabei möglichst viel Kubatur (Volumen) erzielen. Wie sind die Abmessungen zu wählen, damit das erreicht wird? 3 •
   b) Er will auch eine Raumhöhe von mindestens 2,70 m erhalten. Ist dieser Wunsch mit dem Maximalwert verträglich? Wenn nicht, wie müssen die Abmessungen geändert werden und wie verändert sich die Zahl der m^3? 2 •

[**Lösungen:** a) 2x = 7 m h = 2,5 m $V_{max} = 297{,}5\ m^3$ b) $2x_1 = 6{,}44$ m $V_1 = 295{,}596\ m^3$]

4. Die Raute ABCD [A(-6/1/2), B, C(10/5/z_1), D] liegt in der Ebene ε: $-x - 4y + 8z = 18$. 7 •
   Die Diagonale AC ist doppelt so lang wie die Diagonale BD. Über der Raute als Grundfläche wird eine gerade Pyramide mit der Höhe h = 18 errichtet, deren Spitze S über dem Mittelpunkt der Raute liegt. Berechne
   a) die Koordinaten von B, C, D und S (z > 0),
   b) das Volumen der Pyramide,
   c) den Neigungswinkel von AS zur Grundfläche.

[**Lösungen:** a) B($\frac{2}{3}$/$\frac{20}{3}$/$\frac{17}{3}$) C(10/5/6) D($\frac{10}{3}$/-$\frac{2}{3}$/$\frac{7}{3}$) S(0/-5/20) b) V = 432 c) 64,77°]

5. Die Hyperbel $x^2 - 3y^2 = 9$ wird im Punkt P(6/3) von einer Ellipse rechtwinkelig geschnitten.

a) Stelle die Ellipsengleichung auf. *[Kontrolle: $3x^2 + 4y^2 = 144$]* 4 ●

b) Das von der Hyperbeltangente in P, der y-Achse und der Ellipse (zwischen P und dem oberen Nebenscheitel) begrenzte Flächenstück rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Körpers. 2 ●

[**Lösungen:** b) $V = 48\pi + 60\pi = 108\pi$]

32 - 31 ●	30 - 27 ●	26 - 21 ●	20 - 16 ●	15 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

206016 **BG „Porcia“ Spittal an der Drau** **9800 Zernattostraße 10**
8B Mag. Matthäus Melinz

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. A(3/3/-1) ist Eckpunkt einer dreiseitigen Pyramide. Die Höhe h = 9 liegt auf der Trägergeraden $g\colon X = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 18 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$.

   a) Bestimme die Ebene ε, in der die Grundfläche liegt und bestimme die Spitze S der Pyramide (zwei Lösungen für S). 2 ●

   b) Für den Eckpunkt B gilt B(x/-9/1). Bestimme B. Der Eckpunkt C ist Berührpunkt der Kugel k: $x^2 + y^2 + z^2 - 20x + 4y - 10z + 48 = 0$ mit der Grundebene ε. Zeige, dass C die Koordinaten (6/-1/-3) hat. 2 ●

   c) Bestimme das Volumen der Pyramide. 2 ●

   d) Berechne den Winkel, den die Grundfläche mit der Fläche ABS einschließt. 2 ●

   [**Lösungen:** a) ε: 4x - y + 8z = 1 S_1(2/6/10) S_2(-6/8/-6) c) V = 108 d) 51,9°]

2. Von einer Funktion f(x) kennt man $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$ und die Nullstelle N(-2/0).

   a) Zeige, dass für die Funktionsgleichung gilt: $f(x) = \frac{x^3}{4} - \frac{3x^2}{2} + 8$. 2 ●

   b) Berechne Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkt und Wendetangente dieser Funktion. 3 ●

   c) Berechne den Flächeninhalt, der von der Kurve f(x) und der x-Achse eingeschlossen wird. 1 ●

   d) Zeichne mit Hilfe einer Wertetabelle den Graphen der Funktion im Intervall [-3;5]. 2 ●

   [**Lösungen:** b) N_1(-2/0) N_2 = T(4/0) H(0/8) W(2/4) t_W: y = -3x + 10 c) A = 27]

3. Eine Abfüllmaschine für Senftuben füllt erfahrungsgemäß 5% aller Tuben schlecht ab. Zur Qualitätskontrolle überprüft man 20 Tuben. Die Zufallsvariable X sei die Anzahl der schlecht abgefüllten Tuben.

   a) Ermittle mit Hilfe der Binomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine / höchstens zwei Tuben schlecht abgefüllt sind. 2 ●

   b) Eine andere Maschine füllt 250 g-Tuben ab. Die Abfüllmenge ist normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 250$ g und der Standardabweichung $\sigma = 2{,}5$ g. In wie viel Prozent der Tuben sind mindestens 251 g enthalten? 1 ●

   c) Mit einem Kunden wurde vereinbart, dass Tuben zurückgenommen werden müssen, falls der tatsächliche Inhalt vom Sollwert um mehr als 4 g nach unten abweicht. Wie viele Prozent der Tuben müssen voraussichtlich zurückgenommen werden? 1 ●

   d) Durch einen Bedienungsfehler verschiebt sich der Erwartungswert μ der Füllmenge auf 248 g (bei gleichem σ). Auf wie viel Prozent erhöht sich der in c) errechnete Anteil der Reklamationsstücke? 2 ●

   e) Wie groß müsste der Erwartungswert sein, damit 99,7% aller Tuben die erforderliche Abfüllmenge von 246 g erreichen? Welche Argumente sprechen dagegen, den Erwartungswert anzuheben? 2 ●

   [**Lösungen:** a) 0,377 0,925 b) 34,46% c) 5,48% d) 21,19% e) 252,875]

4. Die Parabel $y^2 = 4x$ wird von der Geraden g: x = 8 geschnitten. 8 ●

Das entstandene Flächenstück rotiert um die x-Achse. Diesem Paraboloid ist ein Zylinder mit größtem Inhalt einzuschreiben.

Weiters erzeugen die beiden Tangenten im Schnittpunkt der Parabel mit der Geraden g ein Dreieck, dessen Spitze auf der x-Achse liegt und das durch die Gerade g begrenzt wird. Durch Rotation dieses Dreiecks entsteht ein Kegel. Berechne das Volumen dieses Kegels und gib das Verhältnis der Rauminhalte von Zylinder, Paraboloid und Kegel an.

[**Lösungen:** $V_{max} = 64\pi$ $V_{Kegel} = \frac{512\pi}{3}$ $3:6:8$]

32 - 31 ●	30 - 27 ●	26 - 21 ●	20 - 16 ●	15 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

206026 **BRG Spittal an der Drau** **9800 Zernattostraße 10**
8A Mag. Horst Rittchen

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = 4 \cdot \ln x - 2 \cdot \ln^2 x$.
   a) Diskutiere f (Definitionsmenge, Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte, Wendetangenten) und zeichne ihren Graphen.
   b) Berechne den Flächeninhalt des im 1. Quadranten liegenden Flächenstücks, das vom Funktionsgraphen und der x-Achse begrenzt wird.

   [**Lösungen:** a) $N_1(1/0)$ $N_2 = W(e^2/0)$ $H(e/2)$ t_W: $y = -\frac{4}{e^2}x + 4$ b) A = 8]

2. Gegeben ist der Kreis k: $\left[X - \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}\right]^2 = 20$ und die Gerade g: $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot X = 4$.
   a) In welchen Punkten A und B schneidet die Gerade g den Kreis?
   b) Wie lautet die Gleichung jenes Kreises k_1, der mit dem Kreis k die Sehne AB gemeinsam hat und durch den Punkt C(7/7) geht?
   c) Unter welchem Winkel schneiden die Kreise k und k_1 einander?
   d) Die Gerade g sei Polare bezüglich des Kreises k_1. Wie lautet der zugehörige Pol?

   [**Lösungen:** a) A(3/-5) B(1/1) b) $(x - 8)^2 + y^2 = 50$ c) 71,57° d) $P(\frac{1}{2} / -\frac{5}{2})$]

3. Beim Einschalten eines Stromkreises mit einem Ohmschen Widerstand R = 60 Ohm und einer bestimmten Eigeninduktivität L steigt der Strom I nach der Funktion $I(t) = I_0 \cdot (1 - e^{-(R/L) \cdot t})$ an, wobei $I_0 = 0{,}1$ A (Ampere) beträgt. Die Halbwertszeit beträgt: $t_H = 2{,}31$ s.
   a) Berechne die Eigeninduktivität L (Einheit: Henry).
   b) Berechne die Zeit (in s), bis der Strom 0,09 A (Ampere) erreicht.
   c) Berechne die im Widerstand R in 1 min geleistete Arbeit (es gilt: $W = R \cdot \int I^2 \, dt$).
   d) Zeichne den Graphen der I-Funktion in den ersten 10 Sekunden.

   [**Lösungen:** a) 200 H b) 7,68 s c) 33J]

4. Ein oben offener zylindrischer Blechbehälter soll so dimensioniert werden, dass ein maximales Volumen entsteht, aber nur 20 dm² Blech zur Herstellung benötigt werden.
   a) Wie sind die Maße des Behälters zu wählen und wie viele Liter fasst er?
   b) Angenommen, man möchte zur Herstellung des Behälters aus Beispiel 4a) nur 15 dm² Blech verbrauchen. Wie müsste man dann den Behälter dimensionieren, um ein maximales Volumen zu erreichen? (Verschnitt ist nicht zu berücksichtigen.)

   [**Lösungen:** a) r = h = 1,46 dm $V_{max} = 9{,}71$ l]

32 - 29 ●	28 - 24 ●	23 - 20 ●	19 - 16 ●	15 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

206026 **BRG Spittal an der Drau** **9800 Zernattostraße 10**
8B Mag. Gerold Steurer

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Der Behälter eines Wasserturmes hat die Form eines Drehhyperboloids. Am Boden hat der Behälter den Durchmesser $6 \cdot \sqrt{5}$ m. In der Höhe 12 m hat er den kleinsten Durchmesser mit 6 m. Die gesamte Höhe des Behälters ist 18 m.

   a) Wähle ein günstiges Koordinatensystem und stelle die Gleichung der Achsenschnittshyperbel auf. Berechne den Abstand der Brennpunkte, die Gleichungen der Asymptoten und den Durchmesser des Deckkreises in 18 m Höhe. 2 ●

   b) Konstruiere einige weitere Hyperbelpunkte und zeichne die Hyperbel. 2 ●

   c) Wie viele m^3 Wasser fasst der Behälter? An der Wand des Behälters sind Marken im Abstand 1 m angebracht. Zwischen welchen Marken steht das Wasser, wenn der Behälter noch den halben Inhalt hat? 2 ●

   d) Von der Mitte der Deckfläche wird mit einer Punktlichtlampe in den Behälter geleuchtet. Wie viel % der Bodenfläche werden von den Lichtstrahlen beleuchtet? 2 ●

   [**Lösungen:** a) hyp: $4x^2 - y^2 = 36$ $2e = 6 \cdot \sqrt{5}$ u, v: $y = \pm 2x$ $d = 6 \cdot \sqrt{2}$ c) $V \approx 1017{,}9\ m^3$ $h \approx 5$ m d) $\approx 90\%$]

2. Gegeben sind die Punkte $P_1(3/4/5)$, $P_2(-2/2/1)$, $P_3(-1/1/-1)$, $P_4(5/3/3)$. P_1 und P_2 gehören der Geraden g, P_3 und P_4 der Geraden h an.

   a) Berechne die Koordinaten des Schnittpunktes P_0 der Geraden g und h. 2 ●

   b) Bestimme den Winkel, unter dem die Ebene ε, der P_1, P_2 und P_3 angehören, gegen die xy-Ebene geneigt ist. 2 ●

   c) Beweise: Ist die Ebene eindeutig durch die Punkte A, B, C bestimmt und sind p, q, r reelle Zahlen, für die $p + q + r = 1$ gilt, so liegt der Punkt P des Ortsvektors $\overrightarrow{OP} = p \cdot \overrightarrow{OA} + q \cdot \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{OC}$ in der Ebene ε. 2 ●

   d) Gegeben ist ein Parallelogramm ABCD. M ist der Mittelpunkt der Strecke AB. In welchem Verhältnis teilt die Strecke DM die Diagonale AC? 2 ●

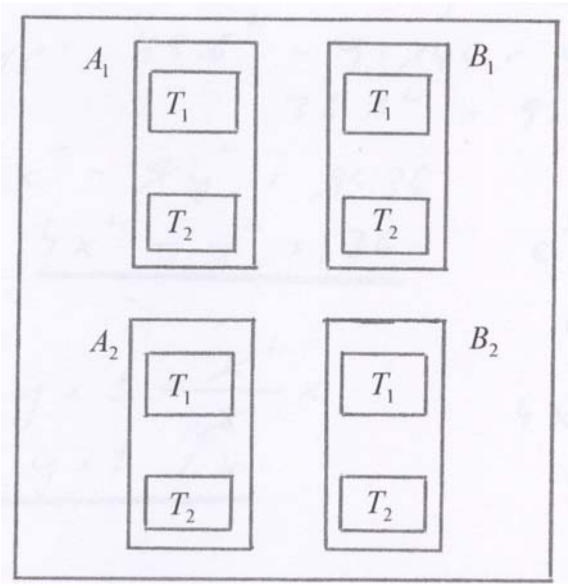
   [**Lösungen:** a) $P_0(-22/-6/-15)$ b) 63,43° d) 1 : 2]

3A Im homogenen zähen Medium wird ein Körper der Masse m und der augenblicklichen Geschwindigkeit v(t) mit der zur Geschwindigkeit proportionalen Kraft $F = -kv$ $(k > 0)$ gebremst. Stelle das Weg-Zeit-Gesetz auf für die Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = v(0) > 0$ beim Eintritt in das Medium. Ermittle auch die maximal erreichbare Wegstrecke im Medium. 3 ●

3B Ein Hohlgefäß entsteht durch Rotation einer streng monoton wachsenden Randkurve im 1. Quadranten im Bereich $0 < y < h$. Wie berechnet man die Hubarbeit, die aufzuwenden ist, um das Gefäß vom tiefsten Punkt O(0/0) aus bis zur Höhe h mit Flüssigkeit der Dichte ρ zu füllen? Wie kann man mit Hilfe von W den Schwerpunkt S der Füllung bestimmen? Berechne S für folgende Gefäßform: Die Randkurve ist eine Parabel in 1. Hauptlage, die durch P(2/2) geht. Die Höhe h = 4 cm. 5 ●

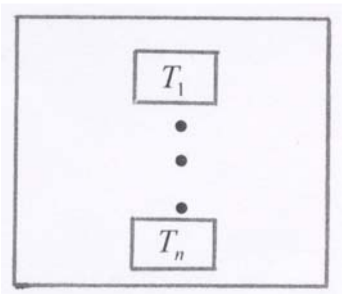
[**Lösungen:** [A] $s(t) = \frac{m \cdot v_0}{k} \cdot (1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot t}) \xrightarrow[t \to \infty]{} \frac{m \cdot v_0}{k}$ [B] $y = \sqrt{2x}$ $S(0/\frac{10}{3})$]

4. Ein elektrisches Gerät wird aus zwei Blöcken vom Typ A und zwei Blöcken vom Typ B, die unabhängig voneinander arbeiten, zusammengebaut. Die Blöcke beider Typen bestehen aus je zwei Bauteilen, die ebenfalls unabhängig voneinander arbeiten. Jeder Bauteil fällt innerhalb eines gewissen Zeitraumes mit derselben Wahrscheinlichkeit 0,1 aus.



a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Block vom Typ A in diesem Zeitraum intakt, wenn dazu beide Bauteile funktionstüchtig sein müssen? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Block vom Typ B in diesem Zeitraum intakt, wenn dazu höchstens ein Bauteil ausfallen darf? 2 ●

b) Das elektrische Gerät ist funktionstüchtig, wenn beide Blöcke vom Typ A und mindestens ein Block vom Typ B intakt sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist das elektrische Gerät funktionstüchtig? 2 ●



c) Ein Block vom Typ C besteht aus n Bauteilen, die unabhängig voneinander arbeiten und innerhalb eines gewissen Zeitraumes mit der gleichen Wahrscheinlichkeit 0,1 ausfallen. Ein Block vom Typ C arbeitet, wenn mindestens zwei Bauteile arbeiten. Aus wie vielen Bauteilen muss ein Block vom Typ C mindestens bestehen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit $\geq 0{,}99$ funktionstüchtig ist? 2 ●

d) Die Bauteile der verschiedenen Blocktypen werden auf einer Maschine hergestellt. Aus früheren Messungen ist bekannt, dass die Lebensdauer X (in Jahren) der Bauteile normalverteilt ist mit dem Erwartungswert $\mu = 2$ Jahren und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}1$ J. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, Ausschuss zu erwarten, wenn die Lebensdauer höchstens $\pm 0{,}25$ J vom Sollwert 2 J abweichen darf? Wie müssen die Toleranzgrenzen gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, Ausschuss zu erhalten, nur mehr 0,7% beträgt? 2 ●

[**Lösungen:** a) 0,99 b) 0,656 c) 4 d) 0,988 [1,73;2,27]]

32 - 29 ●	28 - 25 ●	24 - 20 ●	19 - 16 ●	15 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

206036 **BORG Spittal an der Drau** **9800 Zernattostraße 10**
8A Mag. Sigrid Seilern

Hilfsmittel: Formelsammlung, Grafikrechner

1. Eine Firma macht eine Statistik über die Krankheitstage von 13 Angestellten im Jahr 2006.

Angestellte	A	B	C	D	E	F	G	H	I	K	L	M	N
Krankheitstage	0	5	9	7	6	7	6	8	6	25	9	8	6

a) Um ein angemessenes Bild zu erhalten, wird die Urliste „bereinigt“. Wie? 18 •
Berechne die relativen Häufigkeiten, die Mittelwerte ($\bar{x}$, z, m) und die Streuungsmaße (R, σ, q_1, q_2, q_3). Zeige an Hand eines Kastenschaubildes und eines Histogrammes die Häufigkeitsverteilung und interpretiere sie mit je einem Satz. Erkläre mit einer Zeichnung die Standardabweichung und kommentiere sie.

b) Einem Verein von 20 Mitgliedern gehören drei mit dem Namen Maier an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer durch das Los gewählten 4-gliedrigen Abordnung 10 •
b1) ein Maier
b2) zwei Maier
b3) alle drei Maier
b4) kein Maier
b5) mindestens ein Maier angehören?
Skizziere die Ergebnisse von b1) bis b4)!

[**Lösungen:** a) $\bar{x}$ = 7 z = 7 m = 6 R = 4 σ = 1,3 q_{123} = {6, 7, 8} b1) 0,42 b2) 0,08 b3) 0,0,004 b4) 0,49 b5) 0,51]

2. Von einer quadratischen Pyramide kennt man die Eckpunkte A(6/-5/1) und D(4/-7/9) der Grundfläche sowie die Spitze S(6/1/7). Die Trägergerade der Höhe h lautet: X = (6/1/7) + t·(2/2/1). 24 •
a) Berechne die fehlenden Eckpunkte.
b) Stelle die Ebenen ACS und BDS in Normalvektorform auf.
c) Berechne das Volumen und die Oberfläche.

[**Lösungen:** a) B(0/1/1) C(-2/-1/9) b) ACS: x - 2y + 2z = 18 BDS: 2x - y - 2z = -3 c) V = 144 O = 196,7]

3A Eine bestimmte Substanz zerfällt mit der Halbwertszeit von 3500 Jahren. 18 •
a) Wie viele Promille zerfallen pro Jahr?
b) Nach wie vielen Jahren sind noch 90% der Substanz vorhanden?
c) Nach wie vielen Jahren sind 70% der Substanz zerfallen?
d) Nach wie vielen Jahren ist von 1 kg Anfangsmenge noch 1/4 kg vorhanden?

3B Anfang der 80-er Jahre wurden die ersten Fälle von AIDS bekannt. Im Oktober 1987 lautete die Schlagzeile einer Wochenzeitung: Anzahl der AIDS-Fälle in Österreich verdoppelt sich alle 10 Monate; bis jetzt sind 105 Menschen erkrankt. 10 •
a) Wie viele Österreicher müssten demnach im Oktober 2007 erkrankt sein?
b) Wie brauchbar sind Exponentialfunktionen, um die Ausbreitung von AIDS zu beschreiben? (Die Risikogruppe umfasst heute ungefähr 200000 Personen.)

[**Lösungen:** [A] a) 0,2‰ b) ≈ 527 J c) ≈ 6019 J d) ≈ 6931 J [B] a) ≈ 1,76 Mrd]

4. Diskutiere die Funktion $y = x^2 \cdot e^{-x}$: Definitionsmenge, Nullstellen, Extrema mit Kontrolle ob T oder H, Wendepunkte mit Wendetangente (eine genügt), Monotonie, Krümmung, Graph. Berechne die Fläche zwischen der Nullstelle und dem rechten Wendepunkt. 27 ●

[**Lösungen:** N = T(0/0) H(4/ $\frac{4}{e^2}$) W_1(0,59/0,19) t_{W_1}: y = 0,46x - 0,08 W_2(3,41/0,38) t_{W_2}: y = -0,16x + 0,93 A = 1,32]

107 - 98 ●	97 - 86 ●	85 - 70 ●	69 - 54 ●	53 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

206036 **BORG Spittal an der Drau** **9800 Zernattostraße 10**
8B Dr. Peter Elwitschger

Hilfsmittel: Formelsammlung, Grafikrechner

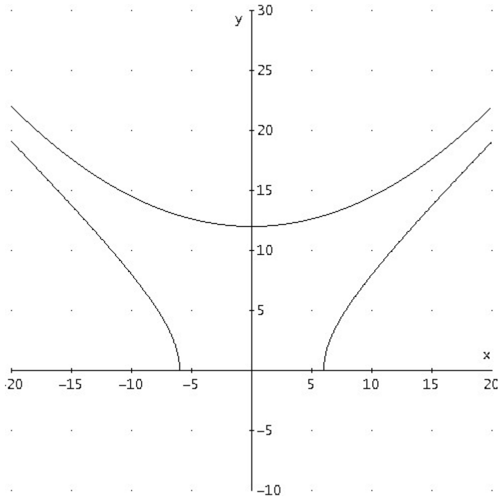
1. a) Diskutiere die Funktion $y = (x - 3)\cdot e^{x/2}$ und zeichne den Graphen im Intervall [-6;3,5]. 8 ●

   b) Ermittle das unbestimmte Integral der angegebenen Funktion und berechne den Flächeninhalt, den der Funktionsgraph mit den Achsen im 4. Quadranten einschließt. 3 ●

   c) Bestimme die Stelle, an der die Funktion die Steigung 2 hat. 1 ●

   [**Lösungen:** a) N(3/0) T(1/-3,3) W(-1/-2,43) t_W: y = -0,61x-3,03 b) A = 7,927 c) x = 2,28]

2. a) Eine 25 cm hohe Blumenschale hat außen die Form eines halben einschaligen Drehhyperboloids ($x^2 - y^2 = 36$) und innen die eines Drehparaboloids ($y = x^2/40 + 12$). Welche Masse hat das Gefäß, wenn es aus Beton besteht (Dichte ρ = 2,5 g/cm^3)? 6 ●



   b) Gegeben sind die beiden Kurven k_1: $y^2 = 4x - 4$ und k_2: $y^2 = 3x$.

   b1) Berechne die Schnittpunkte der beiden Kurven und zeichne ihre Graphen. 2 ●

   b2) Berechne den Inhalt des von den beiden Kurven eingeschlossenen Flächenstücks. 4 ●

   [**Lösungen:** a) V = 2728,33π m = 21,428 kg b1) $S_{12}(4/\pm 2\cdot\sqrt{3})$ b2) A = 4,62]

3. Die Ellipse $3x^2 + 5y^2 = 120$ wird im Punkt P(5/3) von einer konfokalen Hyperbel geschnitten.

   a) Ermittle die Gleichung der Hyperbel. 5 ●

   b) Vom Punkt Q(12/-4) aus werden Tangenten an die Ellipse gelegt. Berechne deren Gleichungen. 5 ●

   c) Die Gleichungen der Tangenten sind t_1: $y = 1/3\cdot x - 16/3$ und t_2: $y = -x + 8$. Berechne die Berührpunkte dieser Tangenten. 2 ●

   [**Lösungen:** a) $6x^2 - 10y^2 = 60$ b) t_1: $y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{3}$ t_2: y = -x + 8 c) T_1(2,5/-4,5) T_2(5/3)]

4. a) Bei der Abfüllung von Waschmittelpaketen sei die Füllmenge normalverteilt, die eingestellte Sollmenge μ beträgt 1020 g. Welche Standardabweichung darf die Maschine höchstens haben, wenn maximal 3% aller Pakete um mehr als 10 g von μ abweichen sollen?

a1) Gib die notwendigen Eingaben am TI 82 schriftlich an und begründe deine Wahl des Startwerts für a unter Verwendung einer Skizze. 3 ●

a2) Berechne σ. 1 ●

b) Die Befragung aller Studenten einer Fachhochschule ergab im letzten Jahr, dass 10% der Studenten mit dem Mensaessen unzufrieden waren. Das Mensa-Organisationsteam steht nun vor der Entscheidung, ob Maßnahmen zur Verbesserung des Essens ergriffen werden müssen. Es beschließt, das Essen zu verbessern, falls der Prozentsatz der unzufriedenen Studenten gleich oder gar größer geworden ist. Um hier richtig zu entscheiden, werden in einer Umfrage 150 Studenten befragt. Ein erster Ansatz des Teams ist der, dass die Hypothese „Mindestens 10% der Studenten sind mit dem Essen unzufrieden" angenommen wird, wenn mindestens 15 Studenten in der Umfrage erklären, dass ihnen das Essen nicht schmeckt.

b1) Gib den Ablehnungsbereich an, berechne die Irrtumswahrscheinlichkeit und beurteile das Ergebnis. 3 ●

b2) Bei der Umfrage erklärten 13 Studenten, sie seien mit dem Essen unzufrieden. Wie wird das Mensa-Team reagieren und welcher „Fehler" ist dabei zu befürchten? 2 ●

b3) Warum testet das Mensa-Organisationsteam gerade die oben genannte Hypothese als Nullhypothese (und nicht die Gegenhypothese)? 1 ●

Das Mensa-Team lässt in einer 2. Umfrage weitere 150 Studenten befragen. Diesmal soll jedoch mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von höchstens 5% getestet werden.

b4) Welche Art von Test ist hier angebracht und warum? 1 ●

b5) Bestimme den Ablehnungs- und Annahmebereich des von dir gewählten Verfahrens und kennzeichne diese in einer groben Skizze der approximierenden Normalverteilung. 2 ●

b6) Es geben 12 Studenten an, mit dem Essen nicht zufrieden zu sein. Welche Konsequenzen wird das Mensateam aus dem Ergebnis ziehen? 1 ●

[**Lösungen:** a2) $\sigma = 4{,}608$ b1) $\alpha = 0{,}446$ b5) $K = \{0, 1, \ldots, 8\}$ $A = \{9, 10, \ldots, 150\}$]

50 - 47 ●	46,5 - 40 ●	39,5 - 32,5 ●	32 - 25 ●	24,5 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

206036 **BORG Spittal an der Drau** **9800 Zernattostraße 10**
8C Mag. Edith Pichler

Hilfsmittel: Formelsammlung, Grafikrechner

---

1. Zwei Kugeln mit je 0,2 m Durchmesser bewegen sich in derselben Bahnebene. Der Mittelpunkt der ersten Kugel läuft auf einer Bahn mit der folgenden Gleichung (Längenmaße in m, Zeiteinheit: 1 s):

$$x = 8 \cdot \sin\frac{\pi}{4}t$$

$$y = 5 \cdot \cos\frac{\pi}{4}t$$

a) Welche Form besitzt die Bahn? Wie lauten die Bahndaten (Kurvenform, Kurvendaten, Umlaufdauer, Startpunkt, Umlaufsinn)? 2 •

b) Wo befindet sich der Kugelmittelpunkt zum Zeitpunkt t = 1,5 s? Wie groß ist zu diesem Zeitpunkt die Geschwindigkeit (vektoriell)? Wie lang ist der Weg, den der Kugelmittelpunkt seit dem Start zurückgelegt hat? 6 •

c) Eine zweite Kugel startet 3 s später als die erste im äußerst linken Punkt ihrer Bahn. Ihr Mittelpunkt bewegt sich auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt (5 m / -3 m) und 6 m Radius. Mit einer Umlaufdauer von 9 s läuft sie gegen den Uhrzeigersinn. Wie lautet die Bahngleichung ihres Mittelpunkts? 2 •

d) Welche Window-Einstellungen sind zu wählen, damit beide Bewegungen während mindestens eines vollen Umlaufs beobachtet werden können? 1 •

e) Zeichnen Sie beide Bahnen (1 m ≙ 0,5 cm) und markieren Sie die Positionen zu jeder vollen Sekunde. 3 •

f) Können die beiden Kugeln tatsächlich volle Umläufe ausführen, oder erfolgt ein Zusammenstoß (Begründung durch Rechnung)? Wenn ja, zu welchem Zeitpunkt (1 Dez.) erfolgt dieser und wo befinden sich dann die Kugelmittelpunkte? 6 •

[**Lösungen:** a) Ellipse T = 8 s (0/5) b) (7,39/1,91) v = (2,40 m/s / -3,63 m/s) s = 8,3 m f) t_{min} = 9,3 s d_{min} = 0,1 < r]

2. Eine Firma erzeugt Akkumulatoren für Handys, wobei die Höchstzahl der Ladezyklen (LZ) eines fabrikneuen Akkus annähernd normalverteilt ist mit einem Mittelwert von 750 LZ bei einer Standardabweichung von 150 LZ.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Akku eines neu gekauften Handys mehr als 900 LZ bewältigt? 4 •

b) Auf welchen Wert müsste die Standardabweichung durch erhöhte Sorgfalt bei Produktion und Lagerung gesenkt werden, damit mindestens 95% aller Akkus mehr als 600 LZ aushalten? 4 •

c) Sie besitzen ein Handy mit einem Akku dieses Typs und haben es bereits 800 mal aufgeladen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihr Akku mindestens 900 LZ bewältigt? 4 •

[**Lösungen:** a) 0,159 b) 91,2 c) 0,429]

3. Beweisen Sie durch Rechnung (in kartesischer Darstellung) und Konstruktion, dass a) die Summe, b) das Produkt einer komplexen Zahl mit der zu ihr konjugierten Zahl stets rein reell ist. 6 •

4. Begründen Sie, warum stets gilt: $\forall\ \vec{a},\ \vec{b}:\ \vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$ 2 •

5. Ein Revier bietet Lebensraum für maximal 400 Murmeltiere. Als das Revier noch von sehr wenigen Tieren bevölkert war, vermehrten sich diese mit einer Rate von netto 90% pro Jahr. Zum Jahresende 2002 zählte man eine Population von 260 Murmeltieren. Der Abschussplan genehmigte ab dem Jahre 2003 100 Abschüsse pro Jahr nach Ende der Schonzeit.

a) Beschreiben Sie die Entwicklung der Murmeltierpopulation verbal. 4 ●
Hinweis: Welche Art des Wachstums würde vorliegen, wenn
- der Lebensraum nicht beschränkt wäre und keine Abschüsse erfolgten?
- der Lebensraum beschränkt wäre und keine Abschüsse erfolgten?

Welche Rückkopplungskreise lägen vor?
Wie wird die Murmeltierpopulation durch die Abschüsse beeinflusst?

b) Zeichnen Sie Wirkungsdiagramm und Flussdiagramm und geben Sie die Rekursionsformel für die Entwicklung der Population an. 6 ●

c) Stellen Sie die Entwicklung der Population ab 2002 durch eine Tabelle sowie grafisch in geeignetem Maßstab dar. Was würde geschehen? 4 ●

d) Zu Jahresende 2007 werden die Voraussagen des Modells durch eine Bestandszählung bestätigt. Daraufhin kommt von den Vertretern der Jägerschaft der Vorschlag, die Murmeltiere in den Jahren 2008, 2009 und 2010 ganzjährig zu schonen und danach wieder zur Abschussrate von 100 Tieren pro Jahr zurückzukehren. Geben Sie die Rekursionsformel für diesen Fall und eine Tabelle für die Jahre 2008 bis 2012 an. Wäre diese Maßnahme geeignet, den Murmeltierbestand langfristig zu sichern? 4 ●

e) Können Sie eine bessere Maßnahme vorschlagen? 2 ●

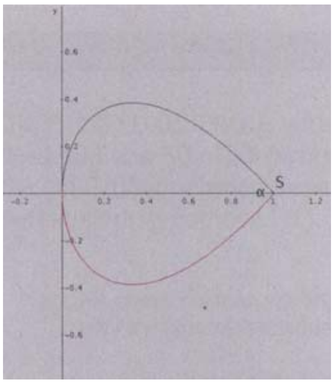
[**Lösungen:** c) $u_0 = 260$ $u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0{,}9 \cdot (400 - u_{n-1}) / 400 - 100$]

60 - 54 ●	53 - 46 ●	45 - 37 ●	36 - 29 ●	28 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

Hilfsmittel: Formelsammlung, CAS Software (Derive)

1. Differential- und Integralrechnung

Die Skizze zeigt eine Kurve mit der Funktionsgleichung $f(x) := (1-x)\cdot\sqrt{x}$. Zusammen mit der gespiegelten Funktion g(x) bildet Sie im Intervall [0;1] die unten gezeigte symmetrische Figur.



a) Stellen Sie die Figur in einem 2D-Graphikfenster dar. 4 ●

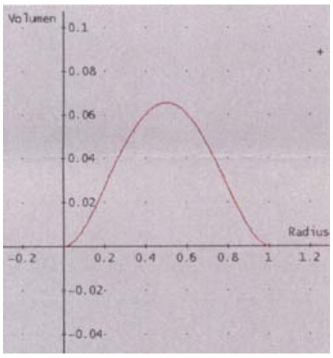
b) Wie groß ist der Winkel α in der Spitze S? 3 ●

c) Wo ist die größte Breite der Figur (parallel zur y-Achse)? Wie breit ist sie? 4 ●

d) Durch Rotation der Funktion f(x) im Intervall [0;1] entsteht eine tropfenförmige Figur. Stellen Sie diese Figur im 3D-Grafikfenster mit Hilfe einer Parameterdarstellung dar. Wie groß ist das Volumen dieser Figur? 6 ●

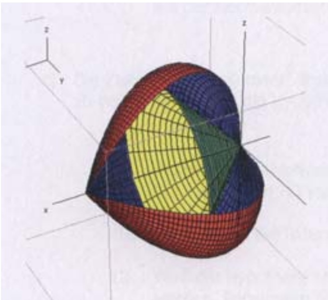
e) In diesen Tropfen soll nun ein Kreiskegel mit der Spitze im Ursprung und der Höhe h auf der x-Achse mit maximalem Volumen eingeschrieben werden. Wie groß muss h sein? 6 ●

f)



Stellen Sie die Funktion V(r,h) für das gesuchte Volumen in einem 2D-Graphikfenster dar. 3 ●

g)



Stellen Sie den Kegel durch Rotation einer Kegelerzeugenden um die x-Achse mit Hilfe einer Parameterdarstellung dar. Um den Kegel sehen zu können ist das erste Viertel des Tropfens durch richtige Parameterwahl herauszuschneiden (siehe Skizze). 4 ●

[**Lösungen:** b) 90° c) $x = \frac{1}{3}$ $b_{max} = \frac{4\cdot\sqrt{3}}{9}$ d) $V = \frac{\pi}{12}$ e) $h = \frac{1}{2}$]

2. Integrationsmethoden

Berechnen Sie folgende Integrale ohne Derive und geben Sie die einzelnen Rechenschritte genau an.

a) $\int e^{x} \cdot \cos x \, dx$ 5 ●

b) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} \, dx$ 5 ●

c) $\int e^{\cos x} \cdot \sin x \, dx$ 5 ●

[**Lösungen:** a) $\frac{e^{x}}{2} \cdot (\sin x + \cos x) + c$ b) $\frac{1}{3} \cdot (\ln x)^3 + c$ c) $-e^{\cos x} + c$]

3. Wahrscheinlichkeit und Statistik

Die Firma LUXENERGIE vertreibt unter anderem auch Glühbirnen und behauptet, dass 480 von 500 Glühbirnen funktionieren (Hypothese H0). Die Hotelkette PLUTO, die ein Großabnehmer dieser Glühbirnen ist, behauptet dass 6% der Glühbirnen defekt sind(Hypothese H1).

a) Als erstes nehmen wir an, dass die Behauptung der Firma Luxenergie stimmt und dass es sich um eine Binomialverteilung handelt. Wie wahrscheinlich ist es dann, dass 6 ●
   - a1) weniger als 17 von 500 Glühbirnen kaputt sind?
   - a2) genau 22 von 500 Glühbirnen kaputt sind?

b) Versuchen Sie diese Binomialverteilung durch eine Normalverteilung anzunähern. 9 ●
   - b1) Bestimmen Sie σ (Standartabweichung) und μ (Mittelwert).
   - b2) Stellen Sie die Normalverteilung und die Binomialverteilung im 2D Graphikfenster dar.
   - b3) Wie groß ist der Unterschied für die Frage, dass höchstens 15 Glühbirnen kaputt sind, wenn wir mit der Normalverteilung statt mit der Binomialverteilung rechnen.

c) Die Zeitschrift „Konsument“ testet 500 Glühbirnen und will überprüfen, ob die Hypothese H0 zu verwerfen ist und die Hypothese H1 anzunehmen ist. 12 ●
   - c1) Wo muss die Ablehnungsgrenze gezogen werden, wenn nur signifikante (95%) Ergebnisse von H0 veröffentlicht werden sollen?
   - c2) Wie groß ist die Irrtumswahrscheinlichkeit β dieses Tests?
   - c3) Wird die Hypothese H0 verworfen, wenn 22 defekte Glühbirnen vorgefunden werden? Begründen Sie ihre Antwort!
   - c4) Stellen Sie die beiden Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (zu H0 und H1) und die repräsentative Fläche für die Irrtumswahrscheinlichkeiten α und β in einem 2D-Graphikfenster dar.

[**Lösungen:** a1) 0,216 a2) 0,078 b1) $\sigma = 4{,}382$ $\mu = 20$ b3) 0,024 c1) 28 c2) 0,353]

4. Analytische Geometrie

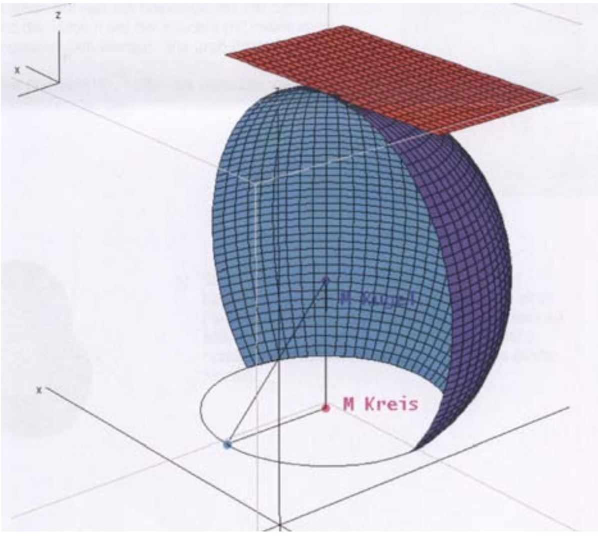
Gegeben sind der Kreis k: $x^2 - 10x + y^2 + 12y = -45$ und der Punkt P(8/5).

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und den Radius des Kreises k. 6 ●

b) Wie lauten die Gleichungen der Tangenten an den Kreis, die durch den Punkt P gehen? 6 ●

c) Stellen Sie den Kreis, die Tangenten und die Berührpunkte T1 und T2 in einem 2D-Grafikfenster dar. 6 ●

d) Erweitern wir nun diese Betrachtung auf den dreidimensionalen Raum. 8 ●
Finden Sie die Gleichung und die Darstellung jener Kugel, welche die Ebene $E := [0,0,10] + s \cdot [1,0,0] + t \cdot [0,1,0]$ berührt und die xy-Ebene im Kreis k schneidet. Verwenden Sie zur Bestimmung der Kugelgleichung die dargestellte Dreiecksbeziehung. Weiters ist die Kugel so darzustellen, dass nur jener Teil der Kugel, der oberhalb der xy-Ebene liegt, sichtbar ist. Die Hälfte der Kugel ist aufzuschneiden, dass man das Dreieck, das zur Berechnung verwendet wurde, sehen kann. Die Ebene ist ebenfalls darzustellen (siehe Skizze).



[**Lösungen:** a) M(5/-6) r = 4 b) t_1: $X = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6{,}245 \\ 8{,}661 \end{pmatrix}$ t_2: $X = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0{,}983 \\ -10{,}632 \end{pmatrix}$
d) $(x - 5)^2 + (y + 6)^2 + (z - 4{,}2)^2 = 5{,}8^2$]

96 - 84 ●	83 - 72 ●	71 - 60 ●	59 - 48 ●	47 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

208016 **Alpen-Adria-Gymnasium Völkermarkt** **9100 Pestalozzistraße 1**
8A Mag. Camille Hoffmann

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Eine Straßenlampe, die an einem Mast in h = 3,5 m Höhe befestigt ist, beleuchtet einen Fußweg, der um $\varepsilon = 11°$ gegen die Horizontale geneigt ist. Der Lichtkegel ist lotrecht nach unten gerichtet und hat einen Öffnungswinkel von $\gamma = 120°$.

   a) Berechne die Länge der beleuchteten Wegstrecke. 4 ●

   b) Wie groß müsste der Öffnungswinkel α sein, damit das beleuchtete Wegstück, das tiefer als die Laterne liegt, um 60% größer ist als bei $\gamma = 120°$? 4 ●

   [**Lösungen:** a) ≈ 14 m b) 133,10°]

2. a) Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen von f: $y = -\frac{1}{6}x^2 + 6$ und den positiven Koordinatenachsen eingeschlossen wird, 4 ●
   - a1) als Grenzwert der Untersumme U_n. Fertige eine Zeichnung für n = 6 an.
   - a2) mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

   b) Diese Fläche rotiert um die y-Achse. Berechne das Volumen des entstehenden Rotationsparaboloids. 2 ●

   c) Beweise die Richtigkeit der in a) verwendeten Formel $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ durch vollständige Induktion. 2 ●

   [**Lösungen:** a1) $U_n = 6b - \frac{b^3}{36}\cdot(1+\frac{1}{n})\cdot(2+\frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 6b - \frac{b^3}{18}$ a2) A = 24 b) $V_y = 108\pi$]

3. Gegeben ist: f: $y = x\cdot e^{1-\frac{x}{4}}$.

   a) Diskutiere die Funktion und skizziere den Graphen im Intervall [0;16]. 4 ●

   b) Man kann $c(t) = t\cdot e^{1-\frac{t}{n}}$ interpretieren als zeitlichen Verlauf der Konzentration eines medizinischen Wirkstoffs im Blut (t in Stunden, n als verabreichte Menge in Stück). Stelle den Graphen für n = 2 und n = 4 in einem Koordinatensystem dar und beschreibe den zeitlichen Verlauf der Konzentration in Abhängigkeit von der verabreichten Menge. Wenn die Konzentration größer als 1 ist, ist die Reaktionsfähigkeit beeinträchtigt. In welchem Zeitraum nach Einnahme von 2 bzw. 4 Stück darf man kein Fahrzeug lenken? (Abschätzung mit Hilfe des Graphen.) 4 ●

   [**Lösungen:** a) N(0/0) H(4/4) W(8/2,94) t_W: -0,37x + 5,9 b) n = 2: 30 min .. 5 h 24 min n = 4: 24 min .. 14 h 24 min]

4. Hans beantwortet im Mathematikunterricht durchschnittlich 2/3 aller Fragen richtig.

   a) Leite die Formel für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen X mit Hilfe der Definition her. 3 ●

   b) Es werden ihm 12 Fragen gestellt. Gib den Erwartungswert und die Standardabweichung an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er von 12 Fragen genau 10 / mindestens 10 richtig beantworten kann? 2 ●

   c) Heute hat er nur 4 von 10 Fragen richtig beantwortet. Ist er schlechter geworden? Teste auf einem 5%-Niveau. Welche Entscheidungsregel muss man aufstellen, um die Signifikanz auf einem 1%-Niveau zu sichern? 3 ●

   [**Lösungen:** b) $\mu = 8$ $\sigma = 1{,}633$ 0,127 0,181 c) $P(X\leq 4) = 0{,}077$ „höchstens 2 von 10“]

96 - 84 ●	83 - 72 ●	71 - 60 ●	59 - 48 ●	47 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

208016 **Alpen-Adria-Gymnasium Völkermarkt** **9100 Pestalozzistraße 1**
8B Mag. Gertraud Miklautsch

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

---

1. Gegeben ist die Funktion f: $y = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$.

   a) Bestimme das Verhalten der Funktion f im Unendlichen unter Beweis der Regel von L'Hospital. Gib die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen und Näherungswerte für die Koordinaten der lokalen Extrempunkte sowie deren Art an. 4 ●

   b) Begründe unter Verwendung von Funktionseigenschaften, dass der Graph der stetigen Funktion f mindestens zwei Wendepunkte besitzt. 1 ●

   c) In Abb. 1 sind der Graph der Funktion f, einer ihrer Stammfunktionen F und einer weiteren Funktion dargestellt. Ordne die Graphen den Funktionen f und F zu und begründe Deine Entscheidung für die Stammfunktion F. 1 ●

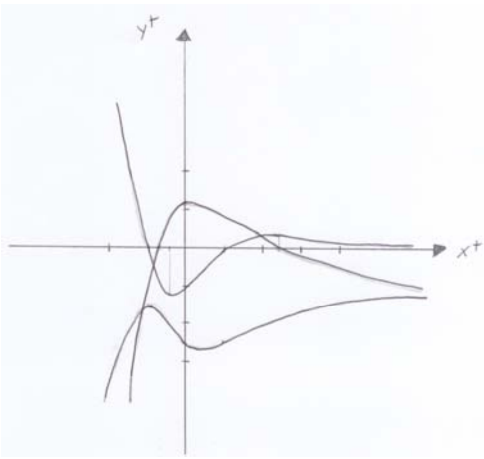


Abb. 1

   d) Die Gerade t ist Tangente an f in T(1/f(1)). Ermittle ohne Verwendung von Näherungswerten eine Gleichung der Tangente t. Zeige, dass der von der Tangente t und den Koordinatenachsen begrenzte Flächeninhalt den Wert $A = e^{-1}$ hat. 2 ●

   e) Der Graph und die Koordinatenachsen begrenzen im dritten Quadranten eine Fläche vollständig. Zeige, dass $A = 1$ ist. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ ist eine Funktion g gegeben durch $y = g(x) = f(x + b)$ $(x \in D_g)$. Begründe, dass für alle b mit $-1 < b < 1$ der Graph der Funktion g und beide Koordinatenachsen im dritten Quadranten eine Fläche vollständig begrenzen. 2 ●

[**Lösungen:** a) $N_{12}(\pm 1/0)$ S(0/1) T(-0,41/-1,25) H(2,41/0,43) d) t: $y = \frac{2}{e}x - \frac{2}{e}$]

2. Eine Ellipse mit den Halbachsen a und b und dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung genügt der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

   a) Verifiziere mit Hilfe der Integralrechnung die Formel für den Flächeninhalt $A = \pi ab$. Führe bei der Integration von f zunächst die Substitution $x = a \cdot \cos\varphi$ durch. 4 ●

   b) Beweise die Formel für das Volumen des bei Rotation um die y-Achse entstehenden Ellipsoides: $V_y = \frac{4\pi}{3}a^2 b$. 2 ●

3. Gegeben sind die Parabeln f_1: $y = a - x^2$ $(a > 0)$ und f_2: $y = x^2$.

a) Bestimme a so, dass die von beiden Kurven eingeschlossene Fläche die Maßzahl A = 9 hat. *[Kontrolle: a = 4,5]* 2 ●

b) Das von den beiden Kurven begrenzte Flächenstück rotiert um die y-Achse. In den so entstehenden Drehkörper ist der volumsgrößte Drehzylinder einzuschreiben. Bestimme die maximalen Abmessungen dieses Zylinders; zeige weiters, dass sich die Volumina beider Drehkörper wie 2: 1 verhalten. 4 ●

[**Lösungen:** b) $V_{par} = 5{,}0625\pi$ $V_{max} = 2{,}53125\pi$]

4. Von einem in Seenot geratenen Segelschiff S werden mittels Funk drei Stationen A, B und C mit $\angle ASB = \alpha = 43{,}2°$ und $\angle BSC = \beta = 51{,}4°$ angepeilt. Die gegenseitige Lage der Stationen kann der Navigator der Seekarte entnehmen: AB = 50,4 sm und BC = 66,2 sm; der mit dem Peilkompass gemessene Winkel $\angle ABC = \gamma$ beträgt 150,5°. 6 ●

a) Zeige, dass die kürzeste Distanz des Segelschiffes zur Station B mit rund 66 sm gegeben ist. Gib auch die Entfernungen zu den Stationen A und C an.

b) Wie schnell ist Hilfe zu erwarten, wenn von der am nächsten liegenden Station ein Rettungsboot mit der Geschwindigkeit von 20 Knoten über Grund in Richtung Segelschiff aufbricht?

[**Lösungen:** a) SA ≈ 70,4 sm SC ≈ 82,87 sm b) 3,302 h]

5. Die Firma „Lecker“ stellt Schokolade her. Die Tafeln werden in Kartons zu je 12 Stück verpackt; erfahrungsgemäß gehen dabei 2% der Tafeln zu Bruch.

a) Gib die Wahrscheinlichkeit an, mit der ein Karton keine zerbrochene Tafeln enthält. Begründe die Wahl deiner Wahrscheinlichkeitsverteilung. Berechne weiters die Wahrscheinlichkeit, mit der sich unter 120 Tafeln höchstens eine zerbrochene Tafel befindet. 2 ●

b) Wie viele Kartons müssen mindestens kontrolliert werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% wenigstens eine zerbrochene Tafel zu finden? Erkläre das Finden der Lösung. 2 ●

c) Eine Verarbeitungsfirma portioniert mit einem Automaten Schokolade zu Tafeln derart, dass die Masse der Tafeln annähernd normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 105,0 g und der Standardabweichung 2,0 g. Auf den Tafeln wird der Packungsinhalt mit 100,0 g ausgewiesen. 2 ●

c1) Berechne, bei wie viel Prozent der Tafeln die Masse unterhalb des angegebenen Wertes liegt.

c2) Herr Schlank meint, der Automat sollte so eingestellt sein, dass bei mindestens 10% der Tafeln die Masse kleiner als 100,0 g ist. Wie groß dürfte der Erwartungswert (bei gleicher Standardabweichung) höchstens sein?

[**Lösungen:** a) 0,98 0,305 b) 13 c) 0,62% $\mu \approx 102{,}5$ g]

34 - 32 ●	31 - 28 ●	27 - 21 ●	20 - 17 ●	16 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

209016 **Stiftsgymnasium St. Paul** **9470 Gymnasiumweg 5**
8A Mag. Silvia Tscheru

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Die Querschnittsfläche einer 6 cm hohen Blumenschale aus Marmor (ρ = 2,7 kg/dm^3), die durch Rotation um die y-Achse entsteht, wird durch die x-Achse und die folgenden Kurven begrenzt: hyp: $5x^2 - 4y^2 = 80$ und par: $y = \frac{4}{25}x^2 + 1$.

   a) Zeichne die Querschnittsfläche dieser Schale. Berechne das Volumen und die Masse dieser Schale. Welche Wandstärke hat die Schale an der oberen Öffnung? Wie hoch steht die Blumenerde in der Schale, wenn man 1/8 Liter davon einfüllt? 7 •

   b) Visualisiere den folgenden Sachverhalt durch eine Skizze: Die Tangente in einem Hyperbelpunkt halbiert den Winkel zwischen den Brennstrecken dieses Punktes. Verifiziere diesen Satz für den Punkt P(6/5) der gegebenen Hyperbel. 2 •

   c) Die Ellipse und die gegebene Hyperbel sind konfokal und schneiden einander im Punkt P. Ermittle die Ellipsengleichung. Beweise, dass die Tangenten in P an beide Kegelschnitte aufeinander normal stehen. Berechne die Schnittpunkte R und S der Tangenten mit der y-Achse und zeige, dass die Brennpunkte und der Punkt P auf dem Kreis mit dem Durchmesser RS liegen. 7 •

   [**Lösungen:** a) V = 237,11 cm^3 m = 640 g d = 1,1 cm h = 4,57 cm c) ell: $5x^2 + 9y^2 = 405$ R(0/9) S(0/-4)]

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = (3+x)\cdot e^{-\frac{x}{2}}$.

   a) Berechne Nullstellen, Extremwerte, Wendepunkte sowie das Grenzverhalten $x \to \infty$. Veranschauliche die Funktion graphisch im Intervall [-3,5;5]. Der Graph der Funktion und die beiden Koordinatenachsen schließen eine Fläche ein. Ermittle den Flächeninhalt. Runde alle Ergebnisse auf 1 Dezimale. 7 •

   b) Diese Funktion stellt näherungsweise den Verlauf einer Krankheitsepidemie innerhalb von 70 Tagen dar, wobei x die Zeit in Tagen und f(x) die Anzahl der Erkrankten angibt. f(x) = 0 ist der Ausbruchszeitpunkt, 1 mm auf der x-Achse entspricht 1 Tag, 1 mm auf der y-Achse 100 erkrankten Personen. Berechne die Änderungsrate nach 10 bzw. 30 Tagen und erkläre das Ergebnis. Interpretiere den Verlauf der Epidemie aus dem Graphen. 4 •

   c) Den Erkrankten wurde ein Medikament verabreicht. Der Abbau dieses Medikaments erfolgt im menschlichen Körper nach der Differentialgleichung $dN/dt = -\lambda N$. Erstelle das „Abbaugesetz“ und bestimme λ, wenn die Halbwertszeit τ = 4 Stunden beträgt. Wie viel % nimmt der Wirkstoff stündlich ab? Ab 200 mg Wirkstoff wird eine heilende Wirkung entfaltet, bei mehr als 700 mg muss man mit schädlichen Nebenwirkungen rechnen. Ein Erkrankter erhält um 6:00 Uhr morgens eine Initialdosis von 600 mg und dann alle 8 Stunden eine Dosis von 500 mg. Berechne für den Zeitraum von 24 Stunden, wie viel mg des Wirkstoffs sich jeweils unmittelbar vor sowie unmittelbar nach jeder Einnahme im Körper befinden. Gibt es Zeiträume, in denen eine überhöhte Dosis zu schädlichen Nebenwirkungen führen kann? Begründe deine Entscheidung. 5 •

   [**Lösungen:** a) N(-3/0) H(-1/3,3) W(1/2,4) A = 7,93 b) 133 -50
   c) λ = 0,17329 16% $\begin{bmatrix} 0\text{ mg} & 150\text{ mg} & 162{,}5\text{ mg} & 165{,}6\text{ mg} \\ 600\text{ mg} & 650\text{ mg} & 662{,}5\text{ mg} & 665{,}6\text{ mg} \end{bmatrix}$]

3A a) Beweise die Gültigkeit des Sinussatzes für ein spitzwinkeliges Dreieck mit Skizze und diskutiere seine Anwendbarkeit. 2 ●

b) Ein Wintersportort möchte eine neue Seilbahn in zwei Sektionen bauen. Die Talstation befindet sich in einer Seehöhe von 850 m. Von dort sieht man die Mittelstation, welche 1450 m über dem Meer liegt, unter dem Höhenwinkel $\alpha = 13{,}9°$. Von der Berghöhe, die mit der Talstation und der Mittelstation in einer Vertikalebene liegt, sieht man die beiden anderen unter den Tiefenwinkeln $\beta = 18{,}4°$ und $\gamma = 26°$. In welcher Höhe liegt die Bergstation? 3 ●

3B Die Bergstation der Seilbahn erhält als Dach eine gerade quadratische Pyramide. Die Diagonalen des Basisquadrats liegen auf den geraden Stahlträgern mit den Gleichungen

e: $X = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ und f: $X = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (Zahlen in Metern).

Die Diagonalen des Quadrats ABCD haben die Länge 6 m und die Pyramidenhöhe ist 3 m.

c) Berechne die Eckpunkte ABCD, die Spitze S(x>0/y/z) und den Rauminhalt. Das Dach wird gedeckt. Wie groß ist die zu deckende Fläche? Bestimme das maximale Volumen, das eine regelmäßige quadratische Pyramide bei gegebener Seitenkante s haben kann. Zeige, dass die obige Pyramide für ihre Seitenkantenlänge s maximales Volumen besitzt. 11 ●

[**Lösungen:** b) ≈ 2100 m c) A(1/6/7) B(3/2/3) C(-1/-2/5) D(-3/2/9) S(2/1/8) V = 36 M ≈ 51 m² $V_{max} = \frac{4 \cdot \sqrt{3}}{27} s^3$]

4. Beim Eignungstest zu einem Studium werden den Bewerbern 100 Fragen gestellt, wovon 5 Fragen aktuelle Tagesthemen betreffen. Zu jeder Frage werden drei mögliche Antworten angeboten, von denen eine richtig ist.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kandidat, der willkürlich ankreuzt, von den Fragen zu aktuellen Tagesthemen 10 ●

- a1) genau die zweite und die dritte Frage richtig ankreuzt,
- a2) alle Fragen richtig beantwortet,
- a3) höchstens eine Frage richtig beantwortet,
- a4) mindestens eine Frage richtig beantwortet,
- a5) mehr als die Hälfte dieser fünf Fragen richtig beantwortet?
- a6) Wie oft muss man die aktuellen Tagesthemen willkürlich ankreuzen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 80% mindestens eine Frage richtig beantwortet zu haben?

b) Erfahrungsgemäß beantworten Kandidaten, die eine Vorentscheidung bereits bestanden haben, im Mittel 80 Fragen richtig mit einer Schwankungsbreite von ±4 Fragen. Man kann daher von einer Normalverteilung ausgehen. 6 ●

- b1) Hat ein Kandidat 83 Fragen richtig beantwortet, so wird er aufgenommen. Berechne die Wahrscheinlichkeit für eine Aufnahme.
- b2) Kandidaten, die weniger als 83 Fragen aber mindestens 70 Fragen richtig haben, kommen auf eine Warteliste. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, auf diese Liste zu gelangen?
- b3) Es bewarben sich 500 Personen für 40 verfügbare Plätze. Wie viele richtige Antworten muss man dann für eine Aufnahme mindestens fordern?

[**Lösungen:** a1) 0,033 a2) 0,004 a3) 0,461 a4) 0,868 a5) 0,210 a6) 4 b1) 0,227 b2) 0,685 b3) 86]

64 - 59 ●	58 - 51 ●	50 - 39 ●	38 - 32 ●	31 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

209016 **Stiftsgymnasium St. Paul** **9470 Gymnasiumweg 5**
8B Mag. Herta Schneider

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Ein Bierfass kann als ein auf beiden Seiten abgeschnittenes Rotationsellipsoid betrachtet werden. Der Fassboden hat den Durchmesser 4,8 dm, der größte Durchmesser des Fasses beträgt 8 dm. Das Fass hat eine Höhe von 12,8 dm.

   a) Skizziere den Sachverhalt und stelle die Gleichung jener Ellipse auf, die bei Rotation um die x-Achse das gegebene Fass erzeugt. Wie viel Hektoliter Bier enthält das volle Fass? Wie hoch steht das Bier im Fass, wenn es 5/6 seines Fassungsvermögens enthält (auf cm genau)? 7 •

   b) Die Biermenge des Fasses wird in Gläser gefüllt. Ein Bierglas hat eine Höhe von 20 cm. Die innere Begrenzung des Längsschnittes besteht aus einem Hyperbelteil und einem Kreisbogen. Der kleinste innere Durchmesser beträgt 4 cm und ist in einer Höhe von 9 cm. Im Punkt P(4/8) geht die Hyperbel knickfrei in den Kreisbogen über. Zeichne den Längsschnitt im Maßstab 1:2 und stelle die Gleichung von Hyperbel und Kreis auf. Berechne das Fassungsvermögen des Glases, wenn es bis 1 cm unter dem oberen Rand mit Bier gefüllt ist und gib an, wie viele Gläser gefüllt werden können. 9 •

   [**Lösungen:** a) ell: $x^2 + 4y^2 = 64$ $V_x \approx 5{,}06$ hl ≈ 10 dm b) hyp: $16x^2 - 3y^2 = 64$ k: $x^2 + y^2 - 19y + 72 = 0$ $V \approx 0{,}57$ l 890]

2. Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug längs einer Geraden, die um $\varepsilon = 16°$ gegen die horizontale Landebahn geneigt ist. Von einem Punkt A der Flugbahn aus sieht man einen Punkt P, der in einer Vertikalebene unterhalb der Flugbahn liegt, unter einem Tiefenwinkel $\alpha = 33°$. Nachdem das Flugzeug 1500 m auf seiner Anflugbahn zum Punkt B weitergeflogen ist, misst man von dort aus den Tiefenwinkel $\beta = 46°$ zum Punkt P.

   a) Berechne die Flughöhe des Flugzeugs im Punkt A und die Entfernung des Punktes B vom Landepunkt L, wenn das Flugzeug seine Bahn beibehält. 4 •

   b) Eine Fluggesellschaft bietet einen Linienflug mit einem Flugzeug mit 300 Sitzplätzen an. Erfahrungsgemäß wird ein gebuchter Platz nur in 90% der Buchungen tatsächlich in Anspruch genommen. 12 •

      b1) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 50 gebuchten Plätzen tatsächlich genau 48 / höchstens 48 belegt werden?

      b2) Der Flug ist ausgebucht.

         i) Berechne μ und σ der Anzahl der tatsächlich belegten Plätze und interpretiere die Ergebnisse.

         ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der belegten Plätze zwischen 265 und 280?

         iii) Ermittle ein symmetrisches Intervall um μ, indem die Anzahl der tatsächlich belegten Plätze mit mindestens 90%-iger Wahrscheinlichkeit liegt.

      b3) Um eine bessere Auslastung zu erzielen, führt die Fluggesellschaft Überbuchungen durch. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer 8%-igen Überbuchung nicht alle Fluggäste transportiert werden können?

      Begründe jeweils die Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung!

   [**Lösungen:** a) h = 1815,9 BL = 5087,9 b1) 0,078 0,966 b2i) $\mu = 270$ $\sigma = 5{,}2$ b2ii) 0,805 b2iii) [261;279] b3) 0,041]

3. Gegeben ist die Funktion f: $y = 12{,}5 - x^2$.

a) Zeichne den Graphen und berechne den Differenzenquotienten im Intervall [1;3]. Deute den Wert! Definiere den Differentialquotienten und stelle damit eine Formel für f'(x) auf. Welche Bedeutung hat f'(x) für eine Kurvenuntersuchung? 5 ●

b) Wie kann man allgemein den Flächeninhalt, den eine im Intervall [a;b] streng monoton fallende Funktion mit der x-Achse einschließt, mit Hilfe von Ober- und Untersummen berechnen? Beschreibe die Vorgangsweise genau (auch formal)! Ermittle damit Schranken für den Flächeninhalt des von f(x) und der x-Achse im Intervall [0;3] eingeschlossenen Fläche. Zerlege das Intervall in 6 gleiche Teile. In wie viele gleiche Teile muss [0;3] zerlegt werden, damit die Differenz zwischen Ober- und Untersumme kleiner als 0,5 ist? 6 ●

c) Die Fläche, die f(x) mit $g(x) = x^2$ einschließt, rotiert um die y-Achse und erzeugt einen Drehkörper. Diesem Drehkörper wird der volumsgrößte Drehzylinder mit derselben Achse eingeschrieben. Berechne sein Volumen. 5 ●

[**Lösungen:** b) $26{,}125 \le A \le 30{,}625$ $n \ge 55$ c) $r \approx 1{,}77$ $h = 6{,}25$ $V_{max} \approx 61{,}36$]

4. Die Höhe einer Pflanze (in Meter) zur Zeit t (in Wochen seit dem Beginn der Beobachtung) soll zunächst durch die Funktion $h_1(t) = 0{,}02 \cdot e^{kt}$ beschrieben werden.

a) Wie hoch ist die Pflanze zu Beginn der Beobachtung? Bestimme k, wenn die Höhe der Pflanze in den ersten 6 Wochen der Beobachtung um 0,48 m zugenommen hat. Um wie viel Prozent nimmt die Höhe pro Woche zu? Wie groß ist die Wachstumsgeschwindigkeit nach 4 Wochen? Leite die Gültigkeit des Wachstumsgesetzes aus einer entsprechenden Differentialgleichung her. Zeichne den Graphen von h_1 (x-Achse: 1 cm = 1 Woche; y-Achse: 1 cm = 0,2 m). 7 ●

b) Wie hoch müsste die Pflanze nach dem Modell $h_1(t)$ nach 8 Wochen sein? Sie ist nach 8 Wochen aber tatsächlich nur 1,04 m hoch. Die Höhe wird deshalb für $t \ge 6$ durch die Funktion $h_2(t) = a - b \cdot e^{-0{,}5t}$ beschrieben. Bestimme a und b aus den beobachteten Höhen nach 6 und 8 Wochen. Zeichne den Graphen von h_2 ins gleiche Koordinatensystem wie h_1. Erkläre die Bedeutung des Wertes a in $h_2(t)$ und beweise die Aussage. Gib an, wann die Pflanze nach dem Modell $h_2(t)$ 1,25 m hoch sein wird. Interpretiere den Wachstumsverlauf aus der Krümmung der Graphen. 9 ●

[**Lösungen:** a) 0,02 m k = 0,5365 71% 0,09 m/W b) 1,46 m a = 1,354 b = 17,168 10,2 W]

64 - 59 ●	58 - 51 ●	50 - 39 ●	38 - 32 ●	31 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

209026 **BORG Wolfsberg** **9400 Gartenstraße 1**
8A Mag. Klaus Goriupp

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. H(1/1) ist Hochpunkt der durch die Gleichung $f(x) = (a + \ln x) / (b \cdot x)$ gegebenen Funktion f.

   a) Berechnen Sie a und b. *[Kontrolle: a = b = 1]* 3 ●

   b) Diskutieren Sie die Funktion (Definitionsbereich, Nullstelle, Extremum, Wendepunkt mit Wendetangente, Monotonie, Krümmung, Grenzverhalten) und skizzieren Sie ihren Graphen. 10 ●

   c) Berechnen Sie das Maß der Fläche, die von f, der Abszissenachse und der Geraden x = e im 1. Quadranten gebildet wird. 3 ●

   d) Diese Fläche rotiert um die Abszissenachse. Wie groß ist das Volumen des dabei entstehenden Rotationskörpers? 6 ●

[**Lösungen:** b) $N(\frac{1}{e}/0)$ H(1/1) $W(\sqrt{e} / \frac{3}{2\cdot\sqrt{e}})$ t_W: $y = -\frac{1}{2e}x + \frac{2}{\sqrt{e}}$ c) A = 2 d) $V_x \approx 5{,}52$]

2. Bei einer Operation wird für die Narkose ein Medikament verwendet, das mit einer Halbwertszeit von etwa 40 Minuten abgebaut wird.

   a) Stellen Sie zwei mögliche Funktionsgleichungen auf, welche die Restmenge, die nach t Minuten noch vorhanden ist, beschreiben. 3 ●

   b) Wie viel Prozent des Medikaments zerfallen pro Minute? 1 ●

   c) Wie viel Prozent einer ursprünglichen Menge sind nach 10 Minuten noch übrig? 1 ●

   d) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion für eine Anfangsmenge von 3 mg. 2 ●

   e) Eine Patientin erhält zuerst 2 mg des Medikaments, danach zweimal in Abständen von jeweils einer halben Stunde je 1 mg. Welche Menge ist nach der zweiten Infusion insgesamt vorhanden? 3 ●

   f) Die Patientin wacht auf, wenn weniger als 0,5 mg des Medikaments übrig sind. Wie lange nach der zweiten Infusion ist dies der Fall? 2 ●

   g) Exponentielle Prozesse können durch die Gleichung $A(t) = A_0 \cdot a^t$ beschrieben werden. 4 ●
      i) Analysieren Sie die Variablen dieser Gleichung und erläutern Sie, wann der exponentielle Prozess ein Wachstum, wann einen Zerfall beschreibt.
      ii) Zeigen Sie durch Rechnung, dass bei einem radioaktiven Zerfall die Halbwertszeit des radioaktiven Stoffes von der Anfangsmenge unabhängig ist.

[**Lösungen:** a) $N(t) = N_0 \cdot 0{,}982821^t = N_0 \cdot e^{-0{,}017328t}$ b) 1,72% c) 84,1% e) 2,302 mg f) 88,11 min]

3. a) Von einer Maschine werden Platten hergestellt. Die Dicke der Platten sei normalverteilt mit dem Erwartungswert $\mu = 12{,}00$ mm und der Standardabweichung $\sigma = 0{,}03$ mm. Wie viel Prozent Ausschuss sind zu erwarten, wenn die Platten 7 •
   i) mindestens 11,97 mm,
   ii) höchstens 12,09 mm stark sein sollen?
   iii) Welche Toleranzgrenze (maximale Abweichung vom Mittelwert) ist gegeben, wenn der bei der Produktion entstandene Ausschuss höchstens 3,5% betragen soll?

   b) Die Tagesproduktion an Platten zählt im Mittel 7% fehlerhafte Stücke. 3 •
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Stichprobe von 50 Platten
   i) höchstens 3,
   ii) mehr als 2 fehlerhafte Platten enthalten sind?

   c) Die Anzahl von Fehlern auf einer Platte sind poissonverteilt. 3 •
   Über einen längeren Zeitraum wurde eine mittlere Fehleranzahl von 4 Fehlern pro Platte ermittelt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, auf zwei zufällig ausgewählten Platten
   i) 7 Fehler,
   ii) weniger als 3 Fehler zu finden.

   d) Von 40 Platten sind 3 fehlerhaft. 10 Platten werden zufällig entnommen. 3 •
   Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine Platte fehlerhaft ist? Wie groß sind Mittelwert und Varianz für die Zufallsvariable „Anzahl der fehlerhaften Platten“?

   e) 80 Platten, von denen 6 fehlerhaft sind, werden in 8 Lagen zu jeweils 10 Stück verpackt. 2 •
   Mit wie vielen fehlerhaften Platten pro Lage muss man im Mittel rechnen? Wie groß ist die Standardabweichung?

   f) $g(x) = (1/(\sigma \cdot \sqrt{2\pi})) \cdot e^{-0{,}5 \cdot ((x-\mu)/\sigma)^2}$ ist die Gleichung der Glockenkurve. 4 •
   g(x) heißt Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung mit den Parametern μ und σ. Eine Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ heißt standardisierte Normalverteilung mit der Wahrscheinlichkeitsdichte $g(u) = (1/\sqrt{2\pi}) \cdot e^{-0{,}5 \cdot u^2}$. Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte von g(u).

[**Lösungen:** ai) 0,8413 aii) 0,9987 aiii) $\varepsilon = 0{,}0633$ bi) 0,5327 bii) 0,6892 ci) 0,1396 cii) 0,0107
d) 0,4109 $\mu = 0{,}75$ $\sigma^2 = 0{,}53365$ e) $\mu = 0{,}75$ $\sigma = 0{,}78404$ f) $W_{12}(\pm 1 / \frac{1}{\sqrt{2\pi e}})$]

4. Eine Ellipse in 1. Hauptlage besitzt in T(2/y) die Tangente t: x + 2y = 8.

   a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ellipse, Gleichungen der Tangenten an die Ellipse in den Punkten $P_1(2/y>0)$ und $P_2(2/y<0)$, den Winkel, den die beiden Tangenten einschließen sowie den Schnittpunkt S der beiden Tangenten. *[Kontrolle: ell: $3x^2 + 4y^2 = 48$, S(8/0)]* 8 •

   b) Berechnen Sie die Ellipsenfläche mittels Integralrechung. 6 •

   c) Die Fläche des Dreiecks P_1SP_2 wird durch den Ellipsenbogen in zwei Teile geteilt. 6 •
   Der größere (rechts liegende) Teil rotiert um die x-Achse und es entsteht der Oberteil eines Pokals. Der untere Teil des Pokals soll ein zur Abszissenachse koaxialer Zylinder mit einer Höhe von h = 3 cm und einem Radius von r = 0,5 cm sein. Berechnen Sie das Gewicht des Pokals bei einer Materialdichte von $\rho = 8{,}5$ g/cm^3.

[**Lösungen:** a) $P_{12}(2/\pm 3)$ t_{12}: $x \pm 2y = 8$ $\alpha = 53{,}13°$ b) $A = 8 \cdot \sqrt{3} \cdot \pi$ c) 0,234 kg]

80 - 71 •	70 - 61 •	60 - 50 •	49 - 40 •	39 - 0 •
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

209026 **BORG Wolfsberg** **9400 Gartenstraße 1**
8B Mag. Richard Stingl

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

---

1. Komplexe Zahlen

Gegeben ist die quadratische Gleichung $z^2 - (3 + 6i)\cdot z + (-3 + 11i) = 0$. 25 ●

a) Gib die Lösungen z_1 und z_2 in den vier Grundformen an.

b) Mache die Probe für beide Lösungen.

c) Ermittle $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ und $z_1 : z_2$
   i) rechnerisch,
   ii) grafisch.

[**Lösungen:** a) $z_1 = 1 + 5i = (\sqrt{26} \angle 78{,}69°)$ $z_2 = 2 + I = (\sqrt{5} \angle 26{,}57°)$ ci) $z_1 + z_2 = 3 + 6i$ $z_1 - z_2 = -1 + 4i$ $z_1 \cdot z_2 = (11{,}4 \angle 105{,}26°)$ $Z_1 : z_2 = (2{,}28 \angle 52{,}12°)$]

2. Extremwertaufgabe

Aus einem quadratischen Karton mit der Seitenlänge l = 10 cm werden vier kongruente gleichschenklige Dreiecke, deren Grundlinien die Quadratseiten sind, herausgeschnitten, sodass das Netz einer quadratischen Pyramide übrig bleibt. 25 ●

a) Genaue Zeichnung!

b) Wie lang ist die Grundkante a der Pyramide zu nehmen, damit ihr Volumen ein Maximum wird?

c) Bereche das Volumen und die Oberfläche dieser Pyramide.

d) Wie viel Prozent der Kartonfläche werden weg geschnitten?

[**Lösungen:** a) $a = 4 \cdot \sqrt{2}$ $h = \sqrt{10}$ c) $V_{max} = \frac{32 \cdot \sqrt{10}}{3}$ O = 80 d) 20%]

3. Differential- und Integralrechnung

Gegeben ist die Kurve k: $9y^2 = x \cdot (3 - x)^2$. 25 ●

a) Wertetabelle und Graph der Kurve im Intervall [0;4].

b) Bei der Rotation der Kurve um die x-Achse entsteht ein Stromlinienkörper. Berechne sein Volumen V_x.

c) Wie groß ist die Schnittfläche dieses Stromlinienkörpers mit der xy-Ebene?

d) An welcher Stelle x hat der Stromlinienkörper seinen größten Querschnitt? Überprüfe das Ergebnis anhand der Zeichnung!

e) Berechne die Länge der von k erzeugten Schleife.

[**Lösungen:** b) $V_x = 2{,}356$ c) 2,771 d) x = 1 e) 6,928]

4. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Drei Kanonen A, B und C einer Stellung haben für einen Schuss die Trefferwahrscheinlichkeit P(A) = 1/5, P(B) = 3/20 und P(C) = 1/10. 25 ●

a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, beim Abschuss einer Salve dreimal / zweimal / einmal / nie zu treffen. Probe!

b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Salve Geschütz C trifft und B nicht oder Geschütz A trifft und C nicht.

c) Wie viele Salven müssen abgefeuert werden, damit die Wahrscheinlichkeit, dass das Ziel zumindest einmal getroffen wird, 90% überschreitet?

d) Erstelle die Wahrscheinlichkeitsfunktion f über der Zufallsvariablen X = „Zahl der Treffer bei einer Salve“ und zeichne den Graphen von f mit e_x = 1 cm und e_y = 10 cm.

e) Besprich den Wahrscheinlichkeitsbegriff, der bei diesem Beispiel verwendet wird.

[**Lösungen:** a) 0,003 0,056 0,329 0,612 b) 0,265 d) 5]

100 - 90 ●	89 - 80 ●	79 - 65 ●	64 - 50 ●	49 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

209026 **BORG Wolfsberg** **9400 Gartenstraße 1**
8C Mag. Waltraud Rieger

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Der Graph einer reellen Funktion f(x) verläuft durch den Punkt P(2/4), die 1. Ableitung der Funktion lautet: $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x$. 12 ●
   a) Zeige, dass die Funktion durch folgende Gleichung beschrieben wird: $f(x) = \frac{1}{4} \cdot (x^3 - 6x^2 + 32)$.
   b) Ermittle die Nullstellen und Extrema, den Wendepunkt sowie die Gleichung der Wendetangente der Funktion.
   c) Weise nach, dass die Koordinaten des Wendepunktes das arithmetische Mittel der entsprechenden Koordinaten der Extremstellen sind. Interpretiere diese Eigenschaft aus geometrischer Sicht.
   d) Zeichne den Graphen der Funktion f(x) in ein kartesisches Koordinatensystem.
   e) Ermittle die Gleichung der Geraden g, die durch den Koordinatenursprung und den Wendepunkt verläuft und zeichne sie in das kartesische Koordinatensystem ein.
   f) Die Funktion f(x) und die positiven Koordinatenachsen begrenzen eine Fläche vollständig. Die Gerade g (aus e)) teilt diese Fläche in einem bestimmten Verhältnis. Gib dieses Verhältnis an.

   [**Lösungen:** b) N_1 (-2/0) N_2 = T(4/0) H(0/8) W(2/4) e) g: y = 2x f) A = 7 $A_1 : A_2 = 9 : 7$]

2. Für die Behandlung einer speziellen Krankheit werden Tabletten verwendet, die die Form gerader Kreiszylinder besitzen. Bei jeder Tablette ist auf genau einer der beiden Kreisflächen ein Firmenlogo eingeprägt. Zur Vermeidung von Eingabefehlern bei der gängigen „Dreiwochentherapie“ erstellt der Produzent jeweils Packungen mit 21 Tabletten. Bei der Herstellung werden die Tabletten in einen Plastikstreifen eingelegt, der Vertiefungen in zwei Reihen enthält. In der ersten Reihe befinden sich 10 solcher Vertiefungen, in der zweiten 11. Die Bestückung der Vertiefungen mit stets 21 Tabletten erfolgt zufällig. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einer Tablette das Firmenlogo sichtbar ist, beträgt 50%. 12 ●
   a) Gib die Anzahl aller verschiedenen Bestückungen an, bei denen das Firmenlogo genau zehnmal sichtbar ist.
   b) Berechne weiters für eine Tablettenpackung die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Finnenlogo
      i) genau zehnmal,
      ii) höchstens viermal sichtbar ist.
   c) In einer Klinik werden ausschließlich Patienten mit dieser Erkrankung behandelt. Dabei werden nur diese Tabletten eingesetzt. In 90% aller Fälle ist die Behandlung mit diesem Medikament erfolgreich. Die Patientenkartei ist dabei alphabetisch angelegt. Ermittle die Anzahl der Karteikarten, die mindestens entnommen werden müssen, damit sich unter den entnommenen Karten mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens eine von einem Patienten befindet, bei dem das Medikament keine Wirkung erzielt.
   d) Die Zufallsgröße X gibt die Masse des wirksamen Bestandteils jeder Tablette in Milligramm an. Der Produzent gibt an, dass X normalverteilt ist mit einem Erwartungswert von 100 mg und einer Standardabweichung von 2 mg.
      i) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Masse der wirksamen Substanz einer Tablette mindestens 95 mg und höchstens 103 mg beträgt.
      ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Masse dieses Bestandteils weniger als 98 mg?

   [**Lösungen:** a) 352 716 bi) 0,168 bii) 0,004 c) 29 di) 0,927 dii) 0,159]

3. a) Der Behälter eines Wasserturms hat die Form eines einschaligen Rotationshyperboloids. Der Durchmesser an der engsten Stelle des Behälters beträgt 8 m. Die kreisförmige Standfläche liegt 8 m tiefer und hat einen Durchmesser von 40/3 m. 12 ●

   i) Stelle den Sachverhalt durch eine Skizze dar und bestimme die Gleichung jener Hyperbel in 1. Hauptlage, die bei Rotation um die y-Achse den gegebenen Behälter erzeugt.

   ii) Wie viele Kubikmeter Wasser sind im Behälter, wenn die Turmhöhe 16 m beträgt und der Wasserturm voll ist?

   b) Eine Wassermenge von 1280,8 m^3 wird vollständig in ein Becken gepumpt, dessen Innenraum ein Rotationsparaboloid ist (größter Durchmesser $8\cdot\sqrt{6}$ m, Tiefe 24 m). Wie hoch steht das Wasser im Becken? Bestimme dazu zunächst die Gleichung jener Parabel in zweiter Hauptlage, die bei Rotation um die y-Achse den Innenraum des Beckens erzeugt.

   [**Lösungen:** ai) hyp: $9x^2 - 4y^2 = 144$ aii) 1280,8 m^3 b) par: $x^2 = 4y$ $h \approx 14{,}3$ m]

4. Bei einem Dachausbau soll auf einen Eckturm vom Durchmesser 10 m eine Halbkugel gesetzt werden. In die Halbkugel soll ein zylindrischer Raum von möglichst großem Volumen eingebaut werden. 12 ●

   a) Wie groß sind Durchmesser und Höhe des zylindrischen Raums zu wählen?

   b) Wie viel Quadratmeter Bodenfläche hat der Raum?

   [**Lösungen:** a) d = 8,164 h = 2,886 b) A = 52,32]

48 - 43 ●	42 - 37 ●	36 - 30 ●	29 - 24 ●	23 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

209026 **BORG Wolfsberg** **9400 Gartenstraße 1**
8D Mag. Gerhard Hainscho

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

1. Differential- und Integralrechnung

f ist eine Polynomfunktion 3. Grades. Sie hat eine Nullstelle im Ursprung und berührt die x-Achse bei $x = 3$. Der Inhalt der Fläche, die ihr Graph mit der x-Achse zwischen den Grenzen 0 und 3 einschließt, beträgt 27.

a) Ermittle die Gleichung der Funktion f. 10 ●

b) Ermittle die Koordinaten von Hoch- und Wendepunkt sowie die Gleichung der Wendetangente; skizziere die Graphen von f und t_W. 11 ●

c) Ermittle den Inhalt der größeren der beiden Flächen, die von f, t_W und der x-Achse eingeschlossen werden. 4 ●

[**Lösungen:** a) f: $y = 4x^3 - 24x^2 + 36x$ b) H(1/16) T(3/0) W(2/8) t_W: $y = -12x + 32$ c) $A = 80/3$]

2. Statistik - partielle Ableitungen

Während einer Autofahrt wird im Sekundentakt die zurückgelegte Entfernung in m gemessen:

Zeit t	Entfernung s
1	25
2	48
3	77
4	keine Messung
5	128

a) Stelle die gegebenen Daten in einem Koordinatensystem als Punktwolke grafisch dar. 3 ●
Kann man einen linearen Zusammenhang vermuten? Skizziere auch eine Punktwolke, die auf *keinen* linearen Zusammenhang schließen lässt.

b) Ermittle die Gleichung der ersten Regressionsgeraden mittels Differentialrechnung 13 ●
nach der Methode der kleinsten Quadrate. Wie lässt sich die Zielfunktion geometrisch deuten? Erkläre den Begriff *erste Regressionsgerade* und erläutere deinen Ansatz durch eine aussagekräftige Skizze.

c) Was bedeutet in *dieser* Aufgabe die Steigung der Regressionsgeraden? 3 ●
Wie schnell fährt das Auto? Gibt die Antwort sowohl in m/s als auch in km/h an.

d) Schätze mit Hilfe der 1. Regressionsgeraden den verlorenen Messwert ($t = 4$). 3 ●
Wie lange braucht das Auto für eine Strecke von 500 m? Eine dieser beiden Fragen ist problematischer als die andere - welche und warum?

e) Warum beschreibt die oben ermittelte Lösung vermutlich nicht exakt die Wirklichkeit? 3 ●
Beantworte die Frage sowohl mit Blick auf die ermittelte Lösung als auch allgemein.

[**Lösungen:** b) g_1: $s(t) = 26t - 2$ c) 26 m/s = 93,6 km/h d) 102 m 19,3 s]

3. Stochastik

Laut Statistik leiden 8% aller Männer Europas an Rotgrünblindheit. Diese ist angeboren und wird X-chromosomal rezessiv vererbt.

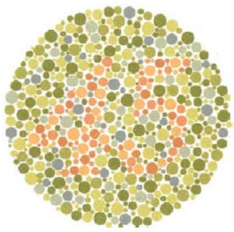
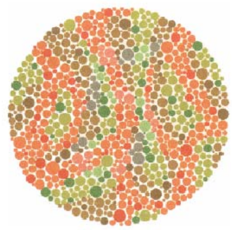
a) Wie viel % aller Frauen sind rotgrünblind? Begründe deinen Ansatz. 2 •

b) Wie viel % aller Frauen sind zwar selbst nicht rotgrünblind, aber dennoch Überträgerinnen von Rotgrünblindheit? 1 •

c) Im heurigen Schuljahr 2007/08 besuchen 25 Schüler und 65 Schülerinnen die Maturaklassen des BORG Wolfsberg. Wie viele dieser Burschen bzw. Mädchen sind erwartungsgemäß rotgrünblind? 2 •

d) Wie viele dieser Burschen bzw. Mädchen sind erwartungsgemäß zwar selbst nicht rotgrünblind, aber dennoch Überträger/innen von Rotgrünblindheit? 2 •

Ishihara Farbtafeln

	
normalsichtig : 45 rotgrünblind : -	normalsichtig : - rotgrünblind : 5

Andere Erbkrankheiten, etwa die mit einer Häufigkeit von 0,0002 *auftretende* Taubstummheit, werden autosomal rezessiv vererbt, sind also nicht an das Geschlecht gebunden.

e) Wie viele Taubstumme bzw. gesunde Überträger/innen sind österreichweit zu erwarten (Einwohnerzahl ca. 8 Millionen)? 4 •

Für eine selten auftretende Krankheit wurde ein neuer Test entwickelt und an einer großen Zahl von Personen erprobt, von denen jedoch „nur“ 2% an dieser Krankheit litten. Die Ergebnisse waren zufrieden stellend: Je 95% der Erkrankten bzw. Gesunden wurden korrekt als krank bzw. gesund erkannt.

f) Wie zuverlässig ist nun dieser Test, d.h. mit welcher Wahrscheinlichkeit ist jemand bei positivem Test tatsächlich krank bzw. bei negativem Ergebnis tatsächlich gesund? 3 •

g) Interpretiere die Ergebnisse aus f). Wie könnte man die Zuverlässigkeit der Ergebnisse erhöhen? Warum lässt sich eine Trefferquote von 100% praktisch nie erreichen? 3 •

Ein Wirkstoff wird als Creme in 30 g Tuben abgefüllt, wobei eine technisch bedingte Standardabweichung von 0,5 g auftritt.

h) Die Herstellerfirma garantiert, dass ihre Abfüllanlage zu 98% exakt arbeitet, d.h. der Tubeninhalt um nicht mehr als einen bestimmten Wert vom Sollwert *nach oben oder unten* abweicht. Für welche Toleranzgrenzen (auf mg gerundet) stimmt diese Aussage?
Hinweis: Rechne mit linearer Interpolation.

[**Lösungen:** a) 0,64% b) 14,72% c) ♂: 2 ♀: 0,416 d) ♂: 0 ♀: 9,568 e) 1600 ≈ 223000
f) P(K|+) = 0,279 P(G|-) = 0,999 h) [28,837; 31,163]]

4. Wachstumsmodelle

Ein Kapital von EUR 5 000,- wird zu 3,5% p.a. angelegt (nomineller Zinssatz, 25% KEST).

a) Welche Art von Wachstum liegt vor? Was sind seine Kennzeichen (Text, Tabelle, Graph)? 4 ●

b) Stelle sowohl eine rekursive als auch eine explizite Formel für das Guthaben nach n Jahren auf. Beschreiben diese Formeln das Wachstum für beliebige Zeiträume? 4 ●

c) Wie hoch ist das Guthaben nach 4 Jahren? 1 ●

d) Wann werden es EUR 6 000,- sein? 4 ●

e) Wie lange dauert es, bis sich ein bestimmter Betrag verdoppelt? Hängt das Ergebnis vom Startwert ab? 3 ●

Will man das Guthaben für beliebige Zeitpunkte angeben können, nimmt man kontinuierliches Wachstum an, d.h. es gilt $y' = r \cdot y$ und $y(0) = 5\,000$.

f) Ermittle die Gleichung einer Funktion y(t) für das Guthaben zum Zeitpunkt t. Welche Wachstumsrate r muss man wählen, damit y(t) für alle ganzzahligen Werte von t mit den Ergebnissen aus b) übereinstimmt? 6 ●

g) $y' = r \cdot y$ ist eine *lineare Differentialgleichung 1. Ordnung*.

- Was versteht man unter einer *Differentialgleichung*? 1 ●
- Erkläre die Begriffe *linear* und *1. Ordnung*. 2 ●

[**Lösungen:** b) $y(0) = 5000$, $y(n) = 1{,}02625 \cdot y(n-1)$; $y(n) = 5000 \cdot 1{,}02625^n$ c) 5546,04 d) 7,04 J
e) 26,75 J f) $y = 5000 \cdot e^{0{,}0259\,t}$]

100 - 90 ●	89 - 76 ●	75 - 61 ●	60 - 50 ●	49 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend

210026 **BRG Feldkirchen** **9560 Flurweg 3**
8A Mag. Ingrid Schicher
8B Mag. Jutta Molnar

Hilfsmittel: Formelsammlung, numerischer Taschenrechner

---

1. Differential- und Integralrechnung

a) Die Funktion $y = \frac{ax^2 + bx - 2}{bx - 2}$ hat das Extremum E(4/9). 3 ●
Bestimme die Funktionsgleichung.

b) Diskutiere diese Funktion für a = b = 1 (Definitionsbereich, Asymptoten, Nullstellen, Extrema mit Art, Wendepunkte) und zeichne den Graphen im Intervall [-9;9] (Einheiten auf x- und y-Achse: 0,5 cm ≙ 1). 12 ●

c) Berechne die Gleichung der Tangente an die Funktion in der linken Nullstelle und bestimme den Winkel, den diese Tangente mit der schrägen Asymptote einschließt. 4 ●

d) Wie groß ist die Fläche, die die Funktion mit der schrägen Asymptote zwischen den beiden Nullstellen einschließt? 3 ●

e) Welche Voraussetzung müsste erfüllt sein, dass die schräge Asymptote und der Graph der Funktion im Bereich $]-\infty;-2[$ einen (endlichen) Flächeninhalt einschließen? Argumentiere! 2 ●

[**Lösungen:** a) a = b = 1 b) a_1: x = 2 a_2: y = x + 3 N_1(-2/0) N_2(1/0) H(0/1) T(4/9) c) $y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ 8,13° d) A = 5,55]

2. Wahrscheinlichkeitsrechnung

Für die Einführung des Euro 2002 wurde bereits im Jahr davor eine große Anzahl von 1 €-Münzen geprägt. Durchschnittlich sind 6% fehlerhaft, d.h. die Prägetiefe ist bei diesen Münzen nicht ganz zufrieden stellend. Ihre Gültigkeit als Zahlungsmittel wird davon jedoch nicht berührt. Nach der Herstellung werden die Münzen in Kartons zu je 100 Stück gefüllt.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einem Karton höchstens eine bzw. mindestens eine fehlerhafte Münze befindet? 3 ●

b) Bei einer Stichprobe werden 5 von 20 Münzen getestet. Von diesen 20 Münzen sind genau drei fehlerhaft (dies hat eine vorangegangene Qualitätskontrolle ergeben). Mit bloßem Auge sind die Münzen nicht zu unterscheiden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den fünf entnommenen Münzen genau zwei fehlerhafte sind? 2 ●

c) Eine Tagesproduktion umfasst 10000 Münzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind höchstens 590 fehlerhaft? Begründe die Wahl der Wahrscheinlichkeitsverteilung. (Skizze!) 3 ●

d) Aufgrund einer Nachjustierung der Prägemaschinen müssen neue Werte ermittelt werden. Als korrekte Prägetiefe wird an einer bestimmten Stelle der Münze 0,12 mm angegeben. Wie viel Prozent der Münzen sind nach der vorgenommenen Einstellung durchschnittlich noch fehlerhaft, wenn bei einer Standardabweichung von $\sigma = 0{,}01$ mm die Toleranzgrenzen mit $x_1 = 0{,}10$ mm und $x_2 = 0{,}14$ mm angenommen werden? (Skizze!) 3 ●

[**Lösungen:** a) 0,015 0,998 b) 0,138 c) 0,337 d) 4,55%]

3. Trigonometrie

Ein ebenes viereckiges Grundstück ABCD hat folgende Abmessungen: AD = 29,4 m, BC = 38,1 m, CD = 42,7 m, $\angle$BCD = 52,3°, $\angle$CDA = 71,6°.

a) Fertige eine übersichtliche Skizze an und berechne die Länge der schwer zugänglichen Seite AB. 6 ●

b) Das Grundstück wird wegen seines ungünstigen Grenzverlaufes vom Verkäufer um 10% unter dem in der Gegend üblichen Preis von 46 €/m² angeboten. Überprüfe, ob der Kaufpreis von 32000 € tatsächlich obigem Angebot entspricht. 4 ●

c) Vom Punkt C aus sieht man die Spitze eines auf einem Berg stehenden Sendemastes unter dem Höhenwinkel von 4,2° und den Fußpunkt dieses 60 m hohen Mastes unter einem Höhenwinkel von 3,9°. Berechne die Höhe des Berges und die Entfernung vom Fußpunkt des Berges zu C. 8 ●

[**Lösungen:** a) AB = 10,36 m b) A = 774,23 m² 32 053,12 € c) 777,3 m 11401,8 m]

4. Exponentialfunktionen

Mit Hilfe der C-14-Methode lässt sich das Alter eines organischen Fundes berechnen. Das Isotop C-14 reichert sich in Pflanzen, Menschen und Tieren an und zerfällt mit einer Halbwertszeit von ca. 5730 Jahren.

a) Stelle das Zerfallsgesetz in der Form $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ auf (λ auf neun Nachkommastellen genau). 3 ●

b) Bei der Freilegung einer vorchristlichen Siedlungsstätte fand man Knochen von Haustieren. Der Anteil an C-14 in diesen Knochen wurde mit 40% des ursprünglichen Wertes gemessen. Zeige, dass die Siedlung auf ca. 5567 v. Chr. zu datieren ist. 3 ●

c) Bis zu welchem Alter lassen sich mit dieser Methode Fundstücke untersuchen, wenn man bis zu einem Tausendstel des ursprünglichen C-14 Gehalts messen kann? 2 ●

d) Wie groß war eine C-14-Menge von derzeit 21 g vor 3000 Jahren? 2 ●

e) 1991 wurde in den Ötztaler Alpen im Gletschereis die Mumie eines Mannes („Ötzi") gefunden. Mit Hilfe der C-14-Methode ermittelte man ein Alter von ca. 5200 Jahren. Wie hoch war der C-14-Anteil im Vergleich zum ursprünglichen Wert N_0? 2 ●

[**Lösungen:** a) λ = 0,000120968 c) 57103,9 J d) 30,19 g e) 53,31%]

5. Kegelschnitte und Extremwerte

Gegeben ist eine Parabel mit der Gleichung $y = \frac{1}{a} \cdot x^2$ mit a > 0.

a) Ermittle die Gleichung einer zweiten zur y-Achse symmetrischen Parabel, die die erste Parabel im Punkt $P(2/y_P)$ rechtwinkelig schneidet. Zeige die Übereinstimmung der zweiten Parabel mit $y = -\frac{a}{16} \cdot x^2 + \frac{4}{a} + \frac{a}{4}$. Skizziere die beiden Parabeln für a = 2 im Bereich $-3 \le x \le 3$. 5 ●

b) Ermittle die Fläche A (in Abhängigkeit von a), die von den beiden Parabeln begrenzt wird. Für welchen Wert von a nimmt der Flächeninhalt A seinen kleinsten Wert an? 6 ●

c) Das von den beiden Parabeln begrenzte Flächenstück dreht sich um die y-Achse. Ermittle das Volumen des Drehkörpers für a = 2. 4 ●

d) Interpretiere, wie sich der Flächeninhalt in Abhängigkeit von a ändert, wenn gilt: 0 < a < 1 (verwende den allgemeinen Flächeninhalt von 5b). 2 ●

[**Lösungen:** b) $A = \frac{2a}{3} + \frac{32}{3a}$ a = 4 $A_{min} = \frac{16}{3}$ c) $V = 5\pi$]

82 - 74 ●	73 - 63 ●	62 - 52 ●	51 - 41 ●	40 - 0 ●
Sehr gut	Gut	Befriedigend	Genügend	Nicht genügend